Wave Optics

اپتیک رشته فیزیک

اپتیک ۲ رشته فیزیک مهندسی

Introduction to Optics

FRANK L. PEDROTTI, S.J.
Marquette University
Milwaukee, Wisconsin
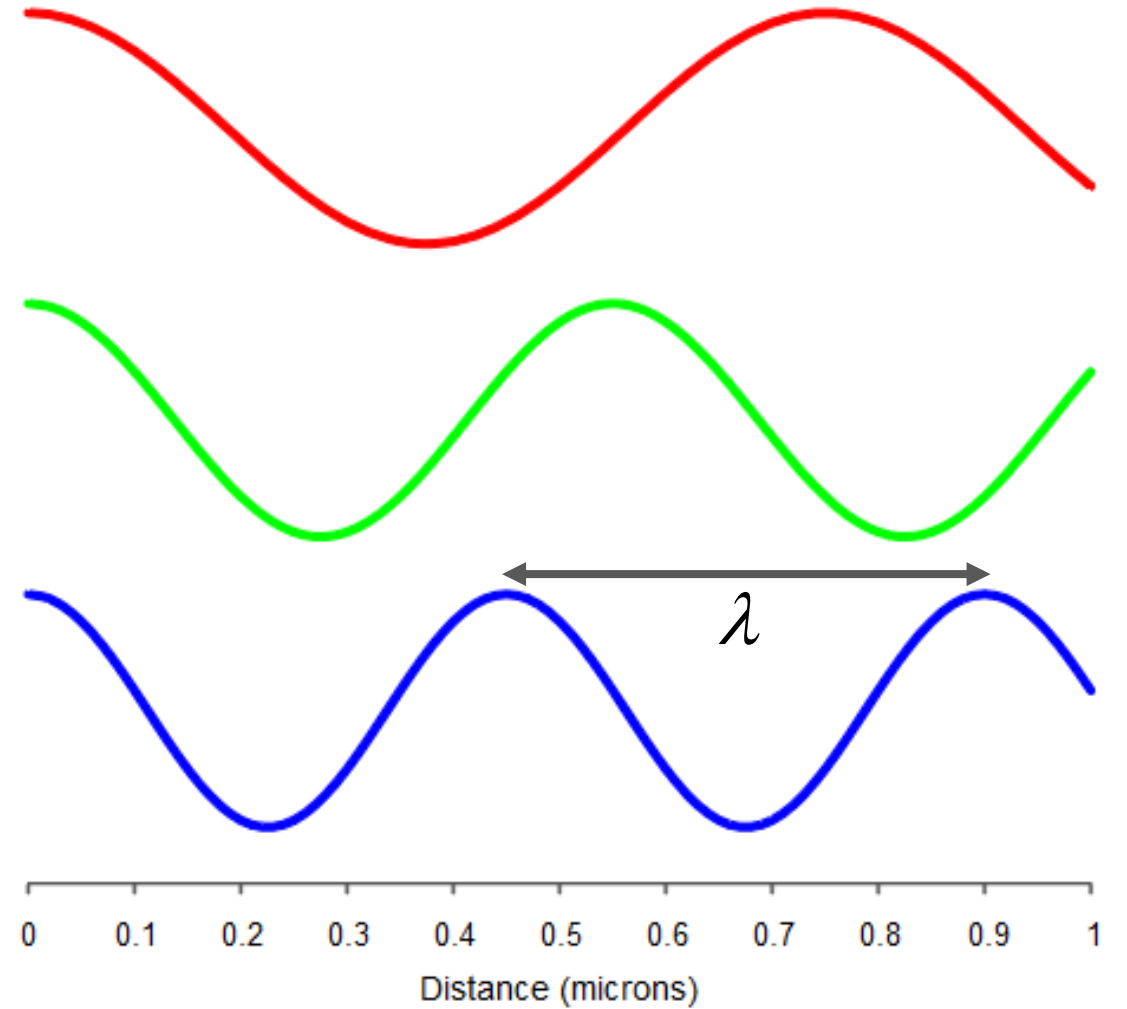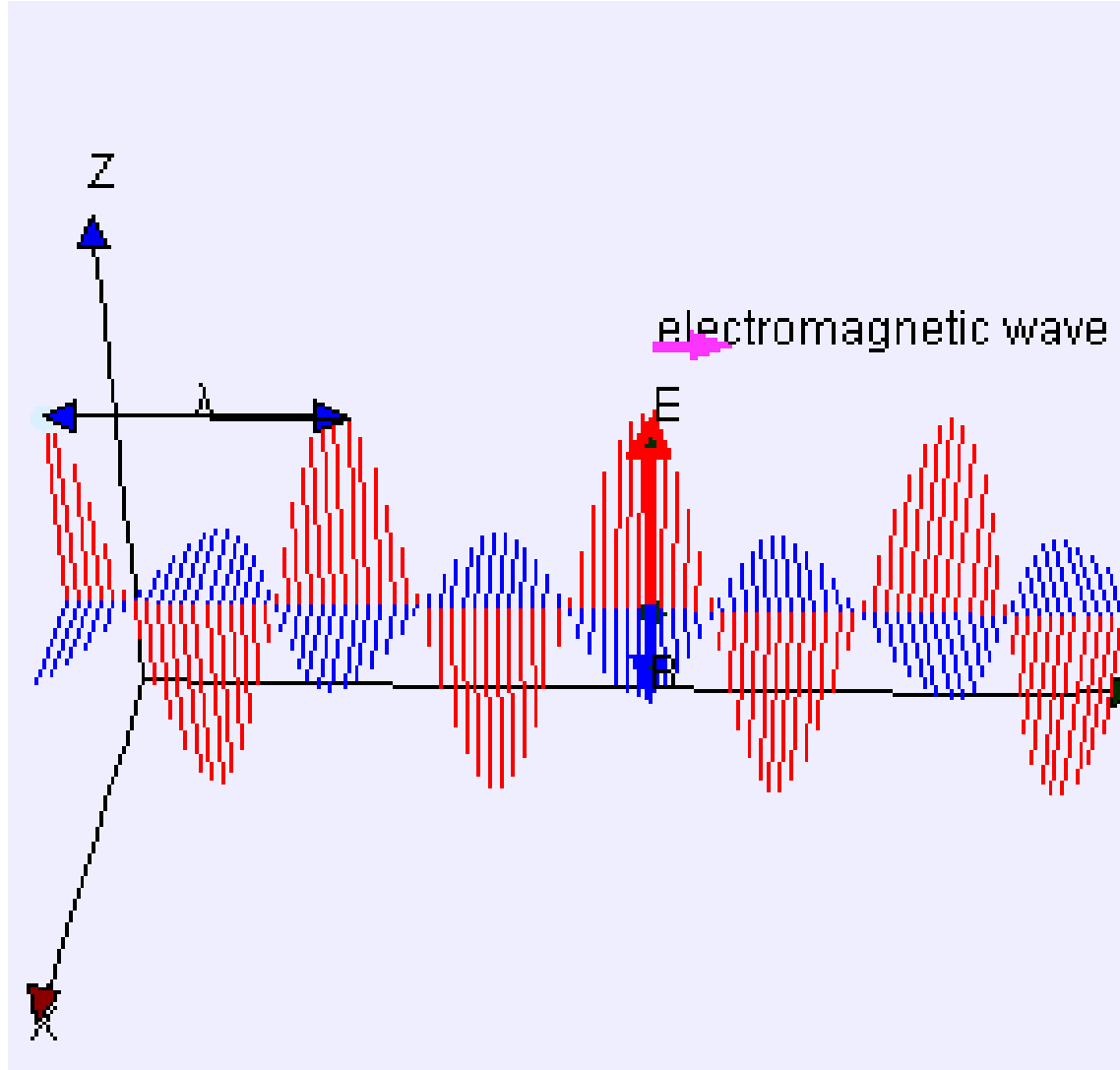*Vatican Radio,*
Rome

LENO S. PEDROTTI
Center for Occupational
Research and Development
Waco, Texas
Emeritus Professor of Physics
Air Force Institute of Technology
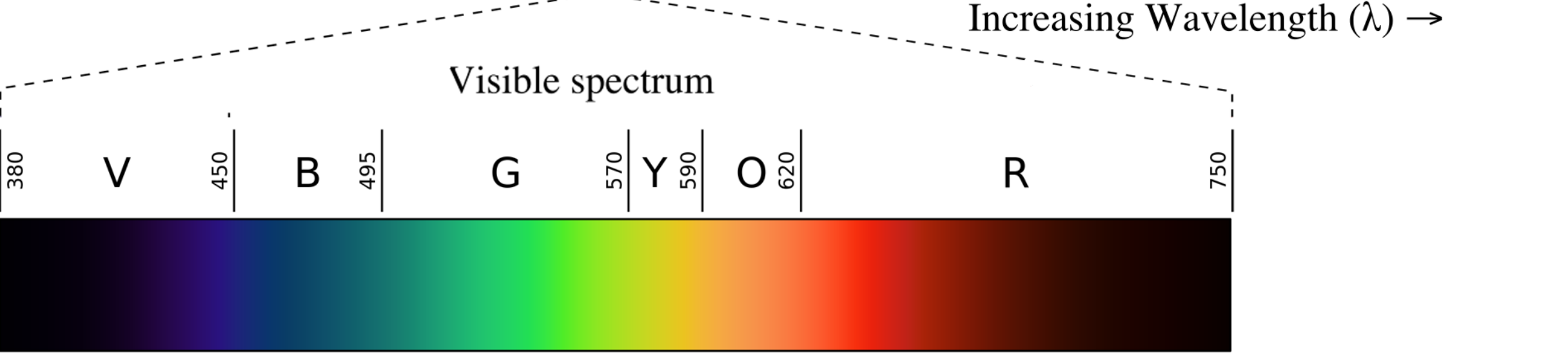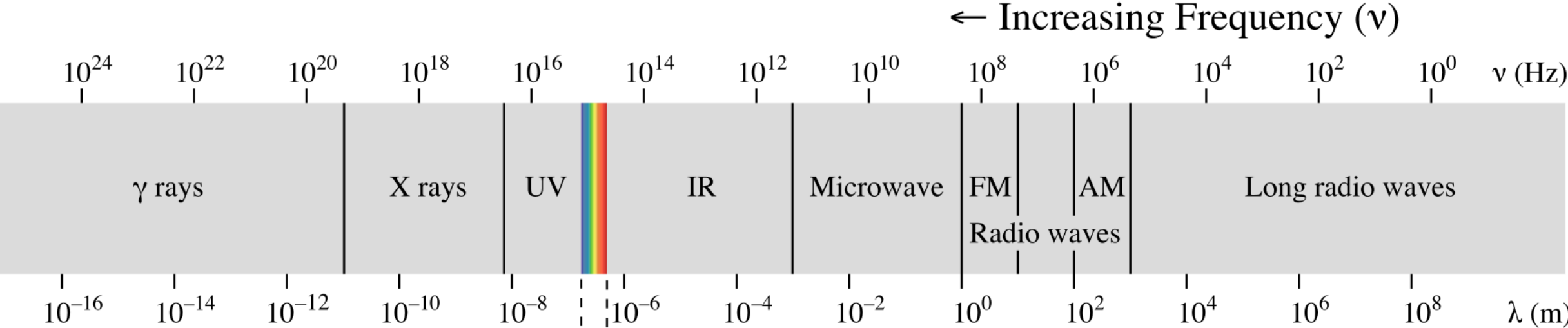*Dayton, Ohio*

INTRODUCTION TO MODERN OPTICS

by Grant R. Fowles

Professor of Physics
University of Utah

1

Electromagnetic spectrum with visible light highlighted

محاسبه انرژی فوتون Photon Energy

$$\text{Photon Energy}: E = h\nu = h\frac{c}{\lambda} = \hbar\omega$$

$$\text{Blue}: \quad E = h\frac{c}{\lambda} = 6.63 \times 10^{-34} \frac{3 \times 10^{8}}{400 \times 10^{-9}} = 4.97 \times 10^{-19} \text{ J} = 4.97 \times 10^{-19} \text{ J} \times \left(\frac{1}{1.6 \times 10^{-19}} \frac{\text{eV}}{\text{J}} \right) = 3.1 \text{ eV}$$

انرژي فوتونهاي ليزر كربن دي اكسيد با طول موج ۱۰.۶ ميكرون و اشعه ايكس با طول موج ۴ آنگسترم را حساب كنيد.

Penetrates Earth's Atmosphere?	Y		N		Y		N	
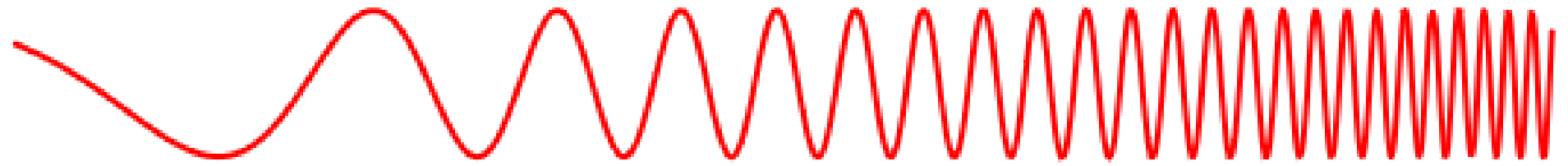
Radiation Type	Radio	Microwave	Infrared	Visible	Ultraviolet	X-ray	Gamma ray
Wavelength (m)	10^3	10^{-2}	10^{-5}	0.5×10^{-6}	10^{-8}	10^{-10}	10^{-12}

Approximate Scale of Wavelength

Buildings	Humans	Butterflies	Needle Point	Protozoans	Molecules	Atoms	Atomic Nuclei

Frequency (Hz)

10^4 10^8 10^{12} 10^{15} 10^{16} 10^{18} 10^{20}
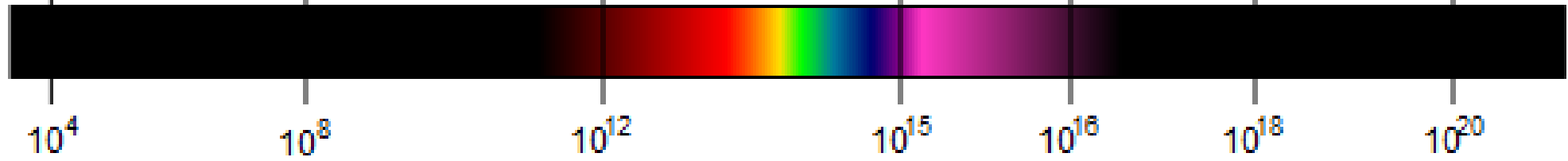
Temperature of objects at which this radiation is the most intense wavelength emitted

1 K
−272 °C

100 K
−173 °C

10,000 K
9,727 °C

10,000,000 K
~10,000,000 °C

5
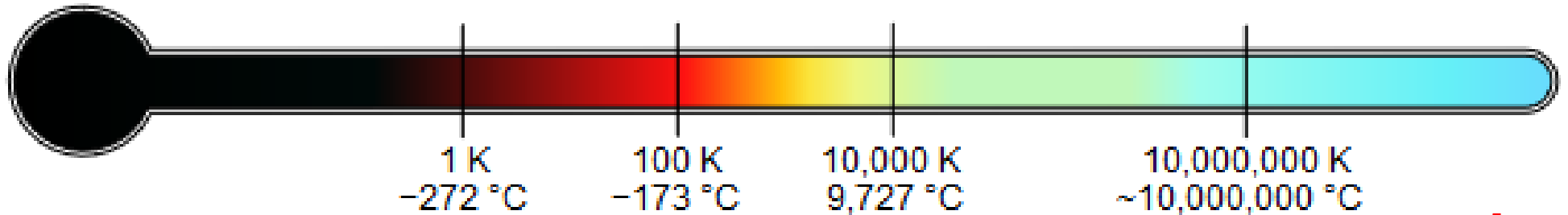
CLASS	FREQUENCY	WAVELENGTH	ENERGY
γ	300 EHz	1 pm	1.24 MeV
HX	30 EHz	10 pm	124 keV
	3 EHz	100 pm	12.4 keV
SX	300 PHz	1 nm	1.24 keV
	30 PHz	10 nm	124 eV
EUV	3 PHz	100 nm	12.4 eV
NUV	300 THz	1 μm	1.24 eV
NIR	30 THz	10 μm	124 meV
MIR	3 THz	100 μm	12.4 meV
FIR	300 GHz	1 mm	1.24 meV
EHF	30 GHz	1 cm	124 μeV
SHF	3 GHz	1 dm	12.4 μeV
UHF	300 MHz	1 m	1.24 μeV
VHF	30 MHz	10 m	124 neV
HF	3 MHz	100 m	12.4 neV
MF	300 kHz	1 km	1.24 neV
LF	30 kHz	10 km	124 peV
VLF	3 kHz	100 km	12.4 peV
VF/ULF	300 Hz	1 Mm	1.24 peV
SLF	30 Hz	10 Mm	124 feV
ELF	3 Hz	100 Mm	12.4 feV

γ = Gamma rays

HX = Hard X-rays

SX = Soft X-Rays

EUV = Extreme-ultraviolet

NUV = Near-ultraviolet

Visible light (colored bands)

NIR = Near-infrared

MIR = Mid-infrared

FIR = Far-infrared

EHF = Extremely high frequency (microwaves)

SHF = Super-high frequency (microwaves)

UHF = Ultrahigh frequency (radio waves)

VHF = Very high frequency (radio)

HF = High frequency (radio)

MF = Medium frequency (radio)

LF = Low frequency (radio)

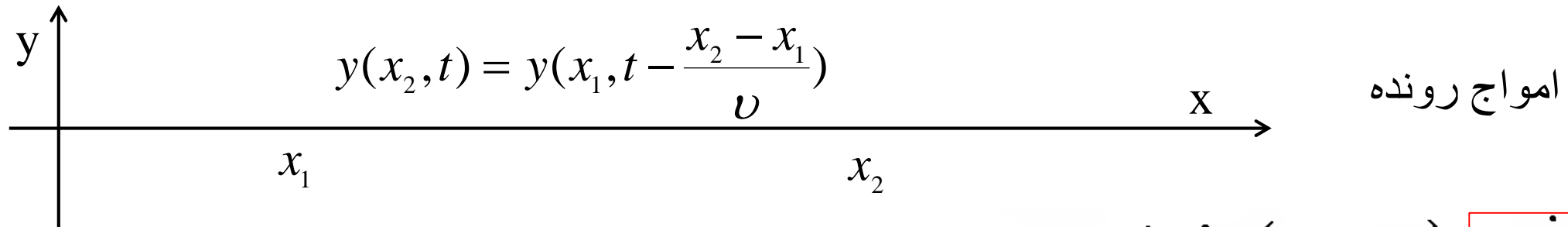VLF = Very low frequency (radio)

VF = Voice frequency

ULF = Ultra-low frequency (radio)

SLF = Super-low frequency (radio)

ELF = Extremely low frequency (radio)

6

$$y = f(x \pm vt)$$ the general form of a traveling wave

$$y(x_2,t) = y(x_1, t - \frac{x_2 - x_1}{\upsilon})$$

x

امواج رونده

x_1 x_2

$$y = A \sin (x - vt) \quad \boxed{\text{periodic wave}}$$

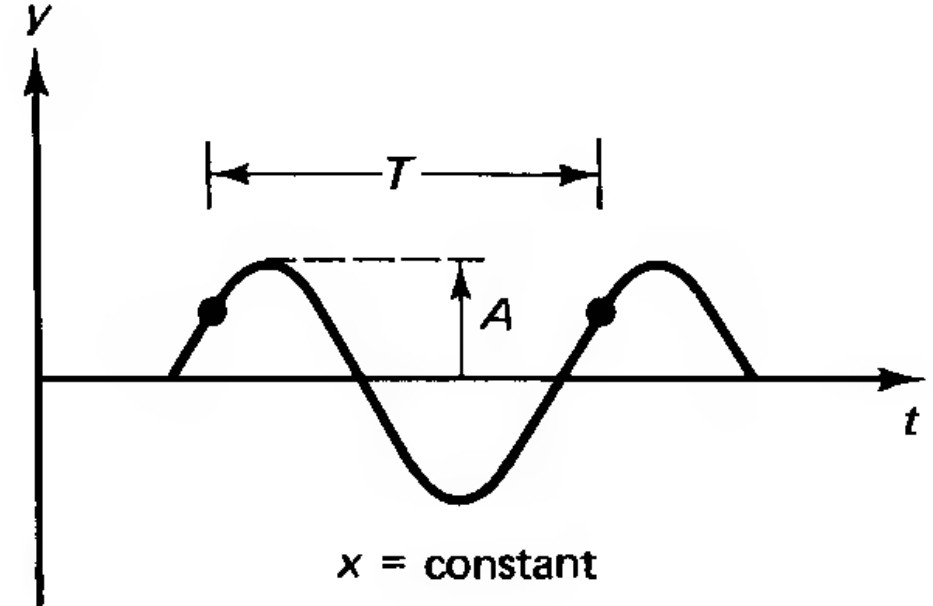For example: $$y = A(x + vt)^2$$

$$y = e^{(x - vt)}$$

$$\frac{\partial y}{\partial x} = \frac{\partial y}{\partial t}\frac{\partial t}{\partial x} = \frac{1}{\upsilon}\frac{\partial y}{\partial t}$$

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial y}{\partial x}\right) = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{1}{\upsilon}\frac{\partial y}{\partial t}\right) = \frac{1}{\upsilon}\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\partial y}{\partial t}\right)\frac{\partial t}{\partial x}$$

$$\frac{\partial^2 y}{\partial x^2} = \frac{1}{\upsilon^2}\frac{\partial^2 y}{\partial t^2}$$

$$\boxed{\frac{\partial^2 y}{\partial x^2} = \frac{1}{\upsilon^2}\frac{\partial^2 y}{\partial t^2} \quad Wave\ Equation}$$

HARMONIC WAVES $y = A \, \genfrac{}{}{0pt}{}{\sin}{\cos}[k(x \pm vt)]$

t = constant

x = constant
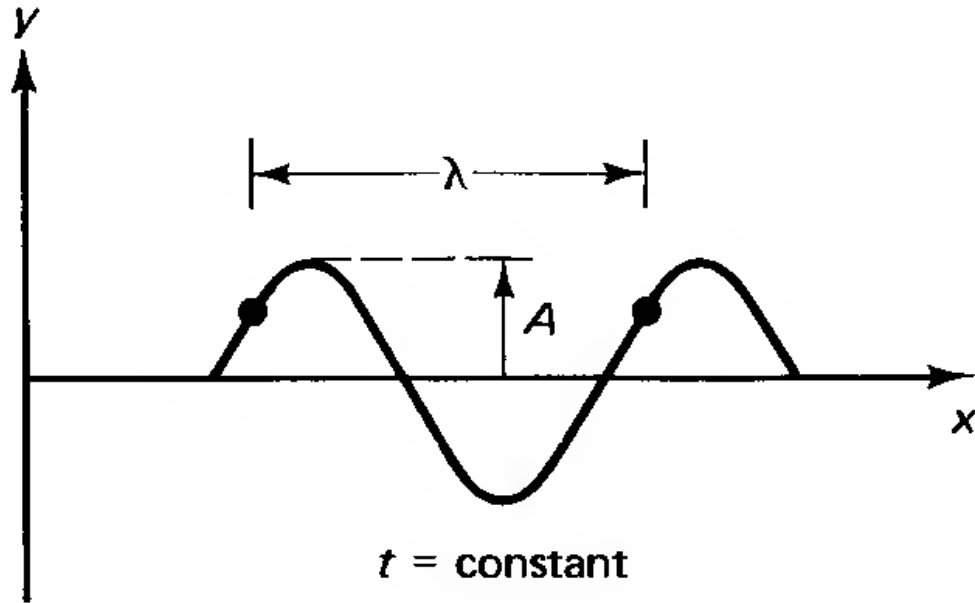
Because of this periodicity, increasing all x by λ should reproduce the same wave. Mathematically, the wave is reproduced because the argument of the sine function is advanced by 2π. Symbolically,

$$A \sin k[(x + \lambda) + vt] = A \sin [k(x + vt) + 2\pi]$$

or

$$A \sin (kx + k\lambda + kvt) = A \sin (kx + kvt + 2\pi)$$

It follows that $k\lambda = 2\pi$, so that the *propagation constant k* contains information regarding the wavelength.

$$k = \frac{2\pi}{\lambda}$$

$$A \sin k[x + v(t + T)] = A \sin [k(x + vt) + 2\pi]$$

or

$$A \sin (kx + kvt + kvT) = A \sin (kx + kvt + 2\pi)$$

Clearly, $kvT = 2\pi$, and we have an expression that relates the period T to the propagation constant k and wave velocity v. The same information is included in the relation

$$v = \nu\lambda \tag{8-5}$$

where we have used Eq. (8-4) together with the reciprocal relation between period T and frequency ν,

$$\nu = \frac{1}{T} \tag{8-6}$$

9

تمرین: معادله موج هارمونیک به صورت زیر داده شده است.

$$y(x,t) = A\sin[k(x - vt)]$$

طول موج را تعریف کنید و ثابت کنید که

$$k = \frac{2\pi}{\lambda}$$

A complex number $\tilde{z}$ is expressed as the sum of its *real* and *imaginary* parts,

$$\tilde{z} = a + ib \qquad (8\text{-}11)$$

where

$$a = \mathrm{Re}\,(\tilde{z}) \quad \text{and} \quad b = \mathrm{Im}\,(\tilde{z})$$

are real numbers and $i = \sqrt{-1}$. The form of the complex number given by Eq. (8-11) can also be cast into polar form. Referring to Figure 8-3, the complex number $\tilde{z}$ is represented in terms of its real and imaginary parts along the corresponding axes. The magnitude of $\tilde{z}$, symbolized by $|\tilde{z}|$, also called its *absolute value* or *modulus*, is given by the Pythagorean theorem as

$$|\tilde{z}|^2 = a^2 + b^2 \qquad (8\text{-}12)$$
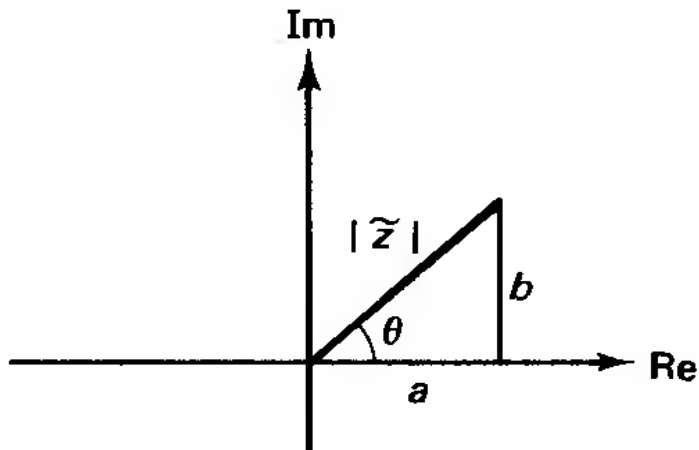
Since from Figure 8-3, $a = |\tilde{z}| \cos \theta$ and $b = |\tilde{z}| \sin \theta$, it is also possible to express $\tilde{z}$ by

$$\tilde{z} = |\tilde{z}|(\cos \theta + i \sin \theta)$$

The expression in parentheses is, by Euler's formula,

$$e^{i\theta} = \cos \theta + i \sin \theta \tag{8-13}$$

so that

$$\tilde{z} = |\tilde{z}|e^{i\theta} \tag{8-14}$$

where

$$\theta = \tan^{-1}\left(\frac{b}{a}\right) \tag{8-15}$$

Thus if $\tilde{z} = a + ib$,

$$\tilde{z}^* = a - ib \quad \text{or} \quad \tilde{z}^* = |\tilde{z}|\, e^{-i\theta} \tag{8-16}$$

where the asterisk is used to denote the complex conjugate. A very useful minitheorem is that the product of a complex number with its complex conjugate equals the square of its absolute value. Using the polar form,

$$\tilde{z}\tilde{z}^* = (|\tilde{z}|e^{i\theta})(|\tilde{z}|e^{-i\theta}) = |\tilde{z}|^2 \tag{8-17}$$

Using Euler's formula, it is possible to express a harmonic wave by

$$\tilde{y} = Ae^{i(kx-\omega t)}$$

where

$$\text{Re}\,(\tilde{y}) = A \cos (kx - \omega t)$$

and

$$\text{Im}\,(\tilde{y}) = A \sin (kx - \omega t)$$

13

PLANE WAVES

$$\psi = \mathring{A}\,\sin(\mathbf{k} \cdot \mathbf{r} - \omega t) \qquad \text{three-dimensional wave equation}$$

$$\nabla^2 \psi = \frac{1}{v^2}\frac{\partial^2 \psi}{\partial t^2} \qquad\qquad \nabla^2 \equiv \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}$$

SPHERICAL WAVES

Spherical waves may also be represented by the harmonic wave equations developed for plane waves, with one modification: The amplitude must be divided by the distance r to give

$$\psi = \left(\frac{A}{r}\right) e^{i(\mathbf{k} \cdot \mathbf{r} - \omega t)}$$

The spherical wave, as it propagates further from the source, decreases in amplitude, in contrast to a plane wave for which amplitude is constant.

14

$$E = E_0 e^{i(\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}-\omega t)}$$

$$B = B_0 e^{i(\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}-\omega t)}$$

$$E = cB$$

In free space, the velocity c is given by

$$c = \frac{1}{\sqrt{\epsilon_0 \mu_0}}$$

The energy density associated with the electric field in free space is

$$u_E = \tfrac{1}{2}\epsilon_0 E^2$$

and the energy density associated with the magnetic field in free space is

$$u_B = \frac{1}{2\mu_0} B^2$$

$$u_B = \frac{1}{2\mu_0}\left(\frac{E}{c}\right)^2 = \left(\frac{\epsilon_0\mu_0}{2\mu_0}\right)E^2 = u_E$$

$$u = u_E + u_B = 2u_E = 2u_B$$

$$u = \epsilon_0 E^2 = \left(\frac{1}{\mu_0}\right)B^2$$

$$\text{power} = \frac{\text{energy}}{\Delta t} = \frac{u\,\Delta V}{\Delta t} = \frac{u(Ac\,\Delta t)}{\Delta t} = ucA$$

the power transferred per unit area, S, is

$$S = uc$$

$$u = \sqrt{u}\,\sqrt{u} = (\sqrt{\epsilon_0}E)\left(\frac{B}{\sqrt{\mu_0}}\right) = \frac{\epsilon_0}{\sqrt{\epsilon_0\mu_0}}EB = \epsilon_0 cEB$$

$$\mathbf{S} = \epsilon_0 c^2 \mathbf{E} \times \mathbf{B}$$

$$I = \langle|\mathbf{S}|\rangle = \epsilon_0 c^2\langle E_0 B_0 \sin^2(\mathbf{k}\cdot\mathbf{r} \pm \omega t)\rangle$$

$$I = \tfrac{1}{2}\epsilon_0 c^2 E_0 B_0$$

$$I = \tfrac{1}{2}\epsilon_0 c E_0^2$$

$$I = \tfrac{1}{2}\left(\frac{c}{\mu_0}\right)B_0^2$$

تمرین: شدت تابش یک موج الکترومغناطیسی داده شده است:

$$I = 8 \times 10^{11} \quad \text{w}/\text{cm}^2$$

دامنه میدان الکتریکی و مغناطیسی این موج را حساب کنید.

$$\varepsilon_0 = 8.85 \times 10^{-12} \quad \mu_0 = 4\pi \times 10^{-7}$$

Superposition of Waves

The resultant displacement is the sum of the separate displacements of the constituent waves:

$$\psi = \psi_1 + \psi_2$$

The same principle can be stated more formally as follows. If Ψ_1 and Ψ_2 are independently solutions of the wave equation,

$$\nabla^2 \psi = \frac{1}{v^2} \frac{\partial^2 \psi}{\partial t^2}$$

then the *linear combination*,

$$\psi = a\psi_1 + b\psi_2$$

where a and b are constants, is also a solution.

SUPERPOSITION OF WAVES OF THE SAME FREQUENCY

Electric field: $\quad E = E_0 \sin (\mathbf{k} \cdot \mathbf{r} + \omega t + \varphi_0)$

where an initial phase angle φ_0 is added for generality, we set $\mathbf{k} \cdot \mathbf{r}$ equal to a constant because we wish to examine waves at a fixed point in space. Thus

$$E = E_0 \sin (\omega t + \alpha) \tag{9-2}$$

where the constant phase angle

$$\alpha = \mathbf{k} \cdot \mathbf{r} + \varphi_0 \tag{9-3}$$

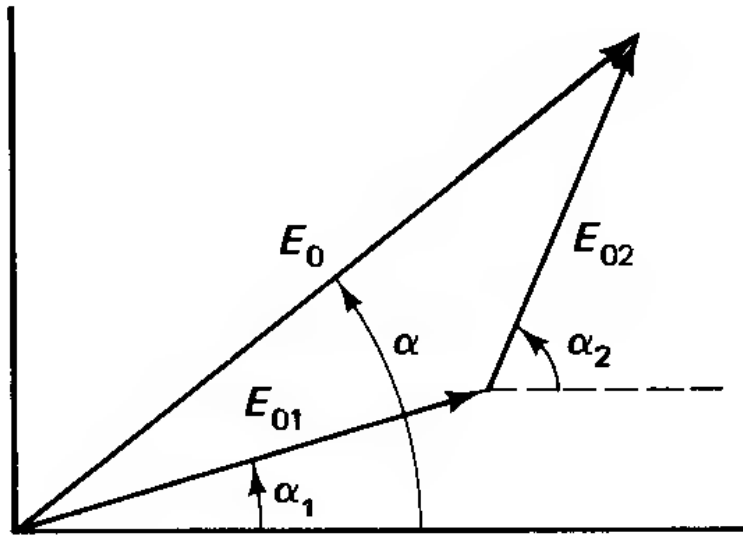By the superposition principle, the resultant electric field E_R at the point is

$$E_R = E_1 + E_2 = E_{01} \sin (\omega t + \alpha_1) + E_{02} \sin (\omega t + \alpha_2)$$

Using the trigonometric identity for the sum of two angles,
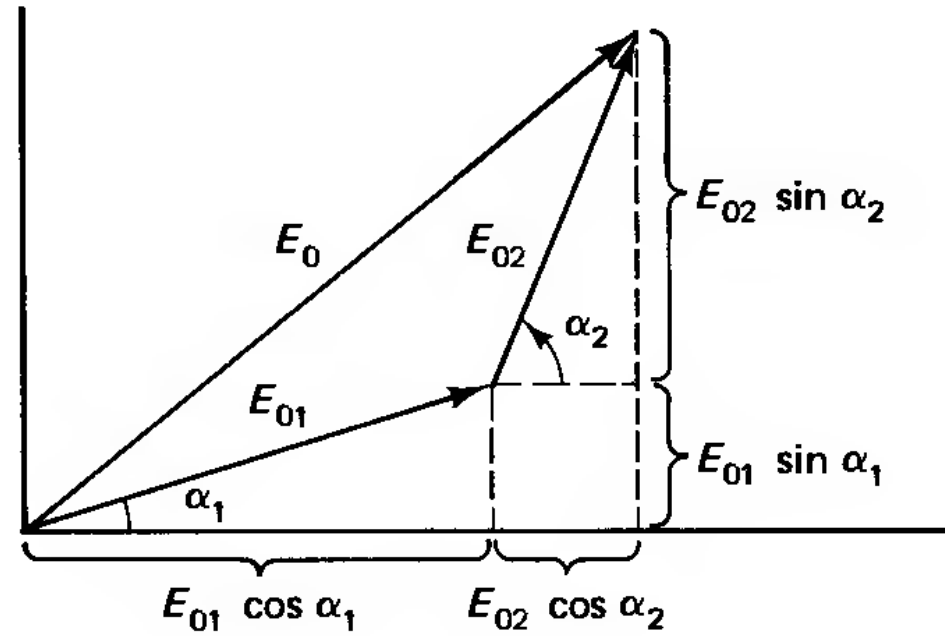
$$\sin (A + B) \equiv \sin A \cos B + \cos A \sin B$$

and recombining terms,

$$E_R = (E_{01} \cos \alpha_1 + E_{02} \cos \alpha_2) \sin \omega t + (E_{01} \sin \alpha_1 + E_{02} \sin \alpha_2) \cos \omega t$$

(a)

(b)

$$E_0 \cos \alpha = E_{01} \cos \alpha_1 + E_{02} \cos \alpha_2$$

and

$$E_0 \sin \alpha = E_{01} \sin \alpha_1 + E_{02} \sin \alpha_2$$

In terms of the quantities E_0 and α defined by this graphical technique, Eq. (9-6) becomes

$$E_R = E_0 \cos \alpha \sin \omega t + E_0 \sin \alpha \cos \omega t$$

or

$$E_R = E_0 \sin (\omega t + \alpha) \qquad (9\text{-}7)$$

We conclude that the resultant wave E_R is another harmonic wave of the same frequency ω with amplitude E_0 and phase α

$$E_0^2 = E_{01}^2 + E_{02}^2 + 2E_{01}E_{02}\cos(\alpha_2 - \alpha_1)$$

and from Figure 9-1b, the phase angle is clearly given by

$$\tan\alpha = \frac{E_{01}\sin\alpha_1 + E_{02}\sin\alpha_2}{E_{01}\cos\alpha_1 + E_{02}\cos\alpha_2}$$

The diagram makes apparent the proper generalization of above Eqs. for N such harmonic waves:

$$E_0^2 = \sum_{i=1}^{N} E_{0i}^2 + 2\sum_{j>i}^{N}\sum_{i=1}^{N} E_{0i}E_{0j}\cos(\alpha_j - \alpha_i)$$

$$\tan\alpha = \frac{\displaystyle\sum_{i=1}^{N} E_{0i}\sin\alpha_i}{\displaystyle\sum_{i=1}^{N} E_{0i}\cos\alpha_i}$$

برآیند دو موج زیر را حساب کنید:

$$E_1 = 10\sin(10t + \frac{\pi}{3}) \quad and \quad E_1 = 20\sin(10t + \frac{\pi}{6})$$

$$E_{0R} = \sqrt{E_{01}^2 + E_{02}^2 + 2E_{01}E_{02}\cos(\alpha_2 - \alpha_2)} = \sqrt{10^2 + 20^2 + 2\times10\times20\cos(\frac{\pi}{3} - \frac{\pi}{6})} = 29.09$$
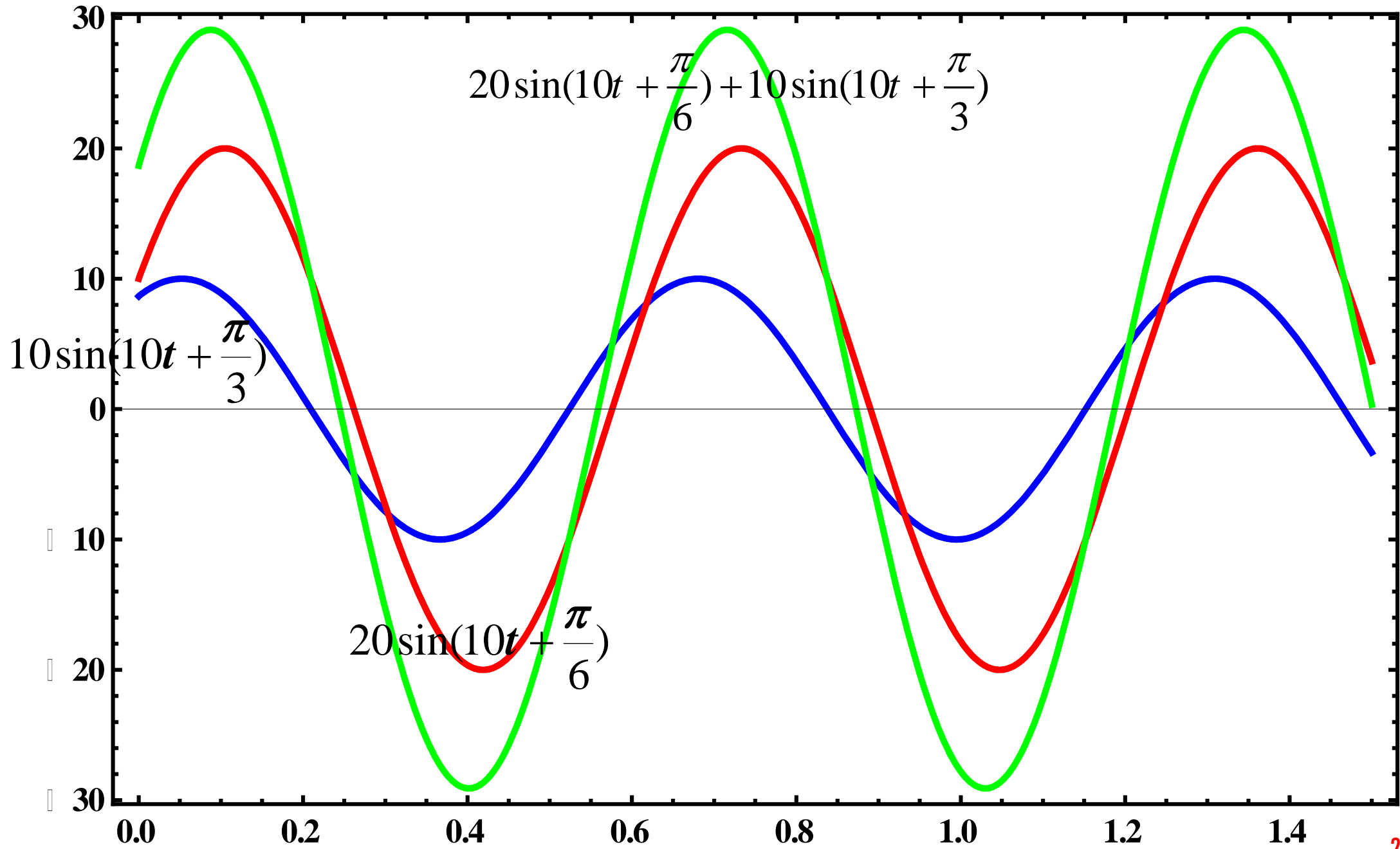
$$\tan(\alpha) = \frac{E_{01}\sin(\alpha_1) + E_{02}\sin(\alpha_2)}{E_{01}\cos(\alpha_1) + E_{02}\cos(\alpha_2)} = \frac{10\sin(\frac{\pi}{3}) + 20\sin(\frac{\pi}{6})}{10\cos(\frac{\pi}{3}) + 20\cos(\frac{\pi}{6})} = 0.836$$

$$(\alpha) = \tan^{-1}(0.836) = 39.9° = 0.696^{rad}$$

$$E_R = 29.09\sin(10t + 0.696)$$

تمرین: حاصل برهم نهی دو موج زیر را حساب کنید:

$$E_1 = 10\sin(50t + \frac{\pi}{3}) \quad and \quad E_2 = 5\sin(50t + \frac{\pi}{2})$$

$$20\sin\left(10t + \frac{\pi}{6}\right) + 10\sin\left(10t + \frac{\pi}{3}\right)$$

$$10\sin\left(10t + \frac{\pi}{3}\right)$$

$$20\sin\left(10t + \frac{\pi}{6}\right)$$

RANDOM AND COHERENT SOURCES

$$E_0^2 = \sum_{i=1}^{N} E_{0i}^2 + 2 \sum_{j>i}^{N} \sum_{i=1}^{N} E_{0i} E_{0j} \cos (\alpha_j - \alpha_i)$$

if phases are random, the phase   differences are also random. The sum of cosine terms in Eq. above then approaches zero as N increases, because terms are equally divided between positive and negative fractions ranging from — 1 to +1. This leaves

$$E_0^2 = \sum_{i=1}^{N} E_{0i}^2 = NE_{01}^2 \quad \Rightarrow \quad I_R = N\, I_0$$

On the other hand, if the N sources are coherent, and in phase, so that all α are equal, then

$$E_0^2 = \sum_{i=1}^{N} E_{0i}^2 + 2 \sum_{j>i}^{N} \sum_{i=1}^{N} E_{0i} E_{0j} = \left(\sum_{i=1}^{N} E_{0i} \right)^2 = (NE_{01})^2 = N^2 E_{01}^2 \quad \Rightarrow \quad I_R = N^2\, I_0$$

$$for\ N\ identical\ source: \quad \frac{I_R^{Coh}}{I_R^{inCoh}} = N$$

STANDING WAVES

a given wave exists in both forward and reverse directions along the same medium. This condition occurs most frequently when the forward wave experiences a reflection at some point along its path. In an ideal situation, none of the energy is lost on reflection nor absorbed by the transmitting medium. This permits us to write both waves with the same amplitude. Forward and reverse waves are, respectively.

$$E_1 = E_0 \sin (kx - \omega t)$$

$$E_2 = E_0 \sin (kx + \omega t)$$

The resultant wave in the medium, by the principle of superposition, is

$$E_R = E_1 + E_2 = E_0 [\sin (kx + \omega t) + \sin (kx - \omega t)]$$

$$E_R = (2E_0 \sin kx) \cos \omega t$$

This is not a moving wave whereas, a standing wave. This shows a space-dependent amplitude of an oscillation.

There exist values of x where the amplitude of standing wave is zero for all t. these values occur whenever:

$$\sin kx = 0, \quad \text{or} \quad kx = \frac{2\pi x}{\lambda} = m\pi, \qquad m = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$$

$$x = 2m\left(\frac{\lambda}{4}\right) = m\left(\frac{\lambda}{2}\right) = 0, \frac{\lambda}{2}, \lambda, 3\frac{\lambda}{2}, \ldots$$

There exist also values of x where the amplitude of standing wave is maximum for all t. these values occur whenever:

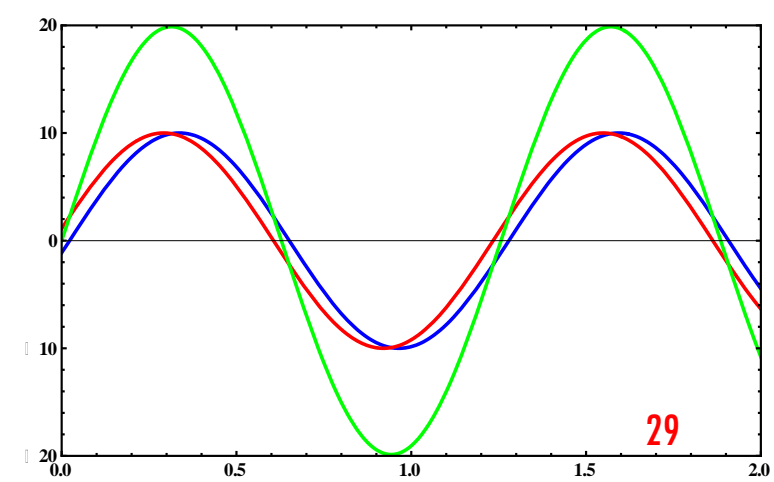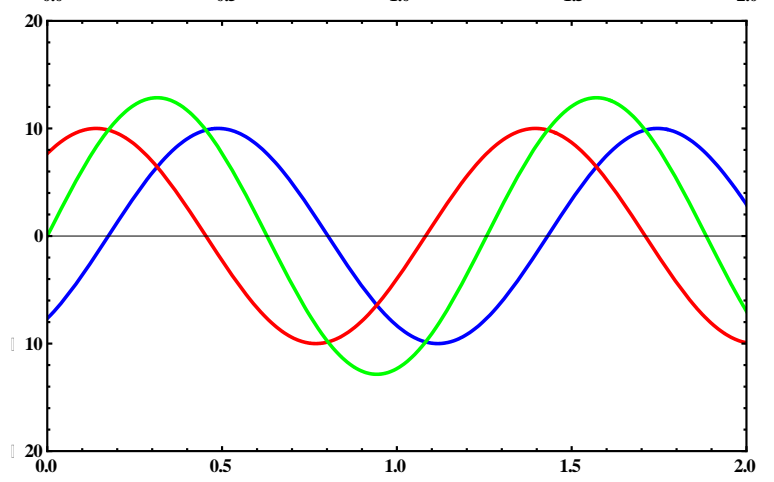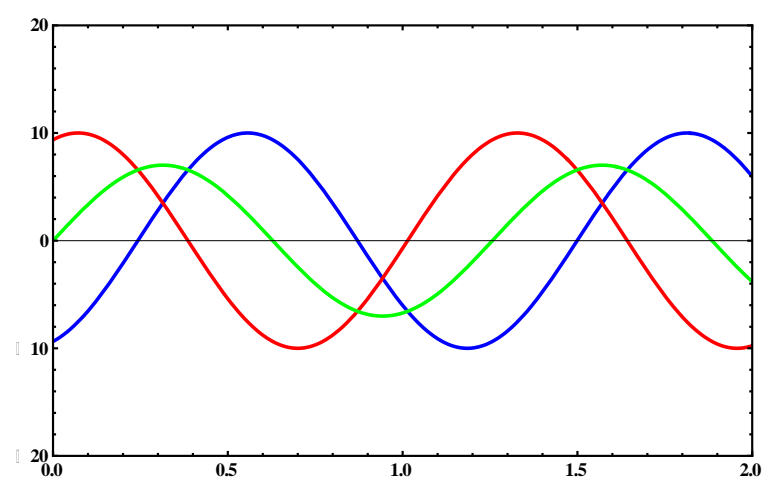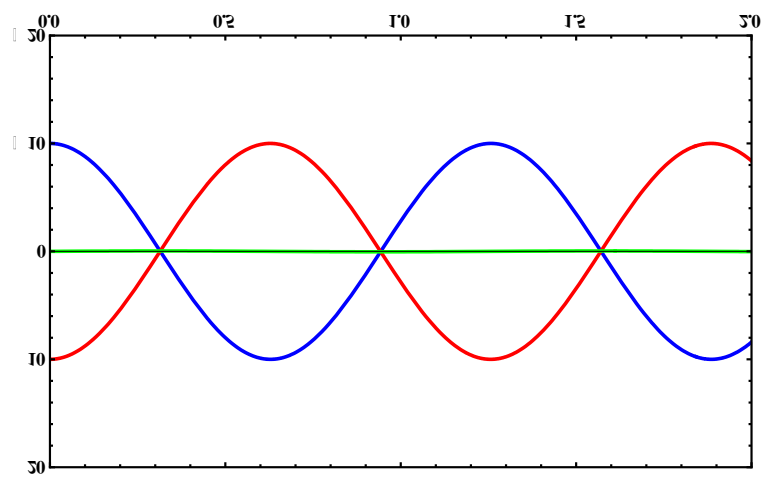$$\sin(kx) = \pm 1 \Rightarrow kx = \frac{2\pi x}{\lambda} = (2m+1)\left(\frac{\pi}{2}\right)$$

$$x = (2m+1)\left(\frac{\lambda}{4}\right) = \frac{\lambda}{4}, 3\frac{\lambda}{4}, 5\frac{\lambda}{4}, \ldots$$

تمرین: دو موج با دامنه یکسان، بسامد یکسان و سرعت یکسان خلاف جهت یکدیگر در حال انتشار هستند.

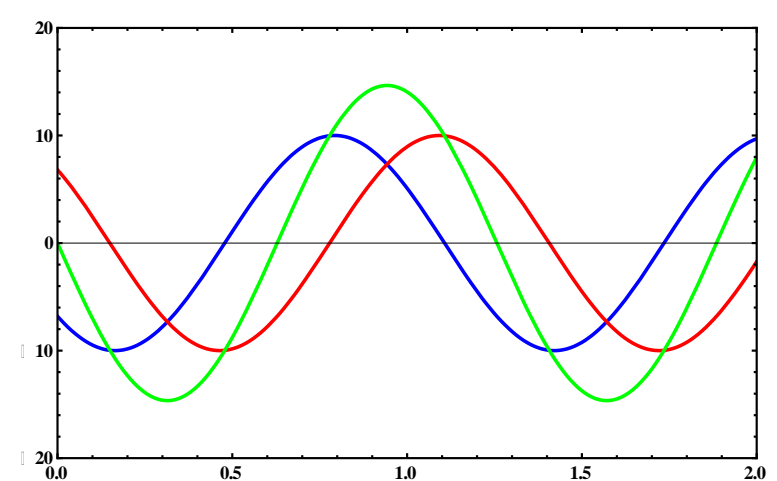دامنه آن دو ۱۰، بسامد آنها ۲۰۰۰ هرتز و سرعت آنها ۲۰۰ متر بر ثانیه است.

معادله این دو موج را بنویسید.

فاصله اولین گره تا سومین شکم امواج ساکن حاصل از برهم نهی این دو موج را حساب کنید.

$\sin(kx - \omega t)$

$\sin(kx + \omega t)$

29
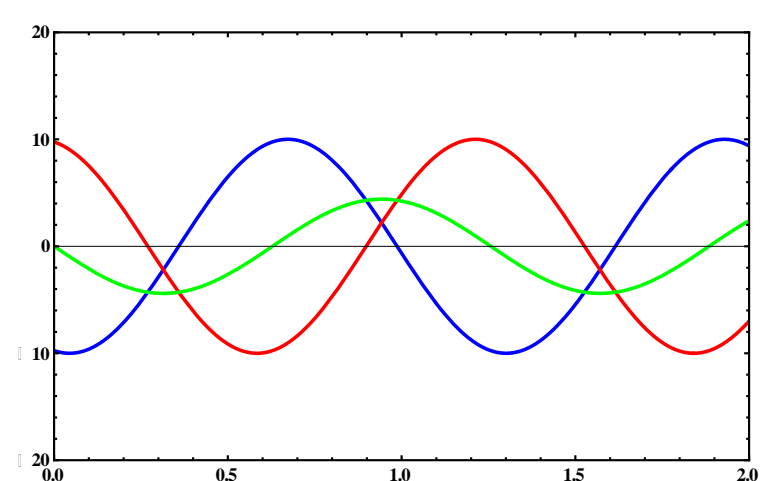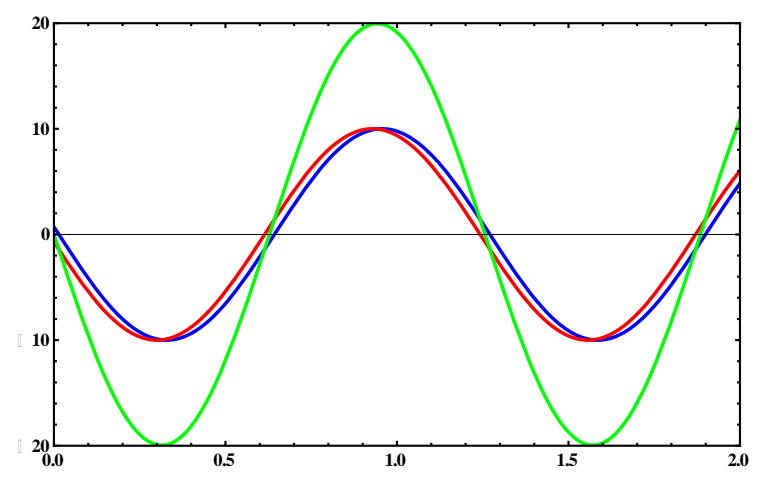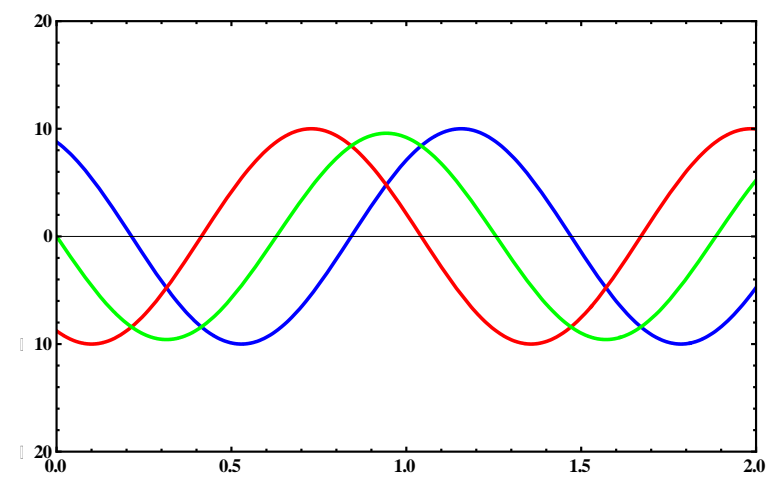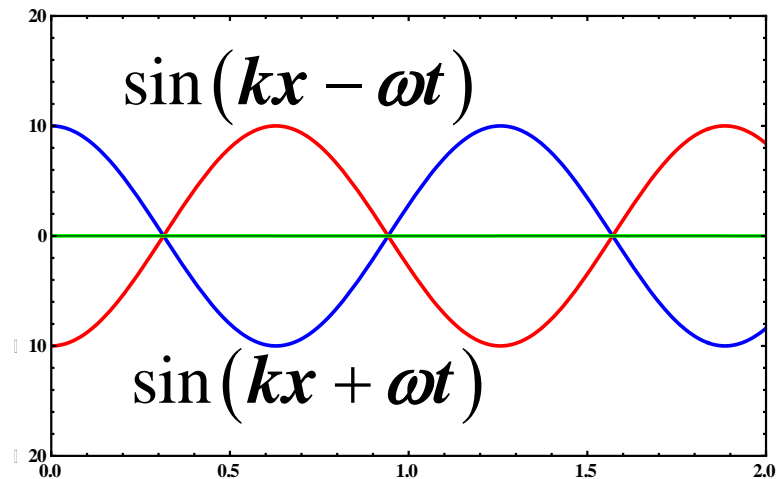
two waves with the same amplitude but differing in frequency and wave number be represented

$$E_1 = E_0 \cos (k_1 x - \omega_1 t)$$

$$E_2 = E_0 \cos (k_2 x - \omega_2 t)$$

$$E_R = 2E_0 \cos \left[\frac{(k_1 + k_2)}{2} x - \frac{(\omega_1 + \omega_2)}{2} t \right] \cos \left[\frac{(k_1 - k_2)}{2} x - \frac{(\omega_1 - \omega_2)}{2} t \right]$$

$$\omega_p = \frac{\omega_1 + \omega_2}{2}, \qquad k_p = \frac{k_1 + k_2}{2}$$

$$\omega_g = \frac{\omega_1 - \omega_2}{2}, \qquad k_g = \frac{k_1 - k_2}{2}$$

$$E_R = 2E_0 \cos (k_p x - \omega_p t) \cos (k_g x - \omega_g t)$$
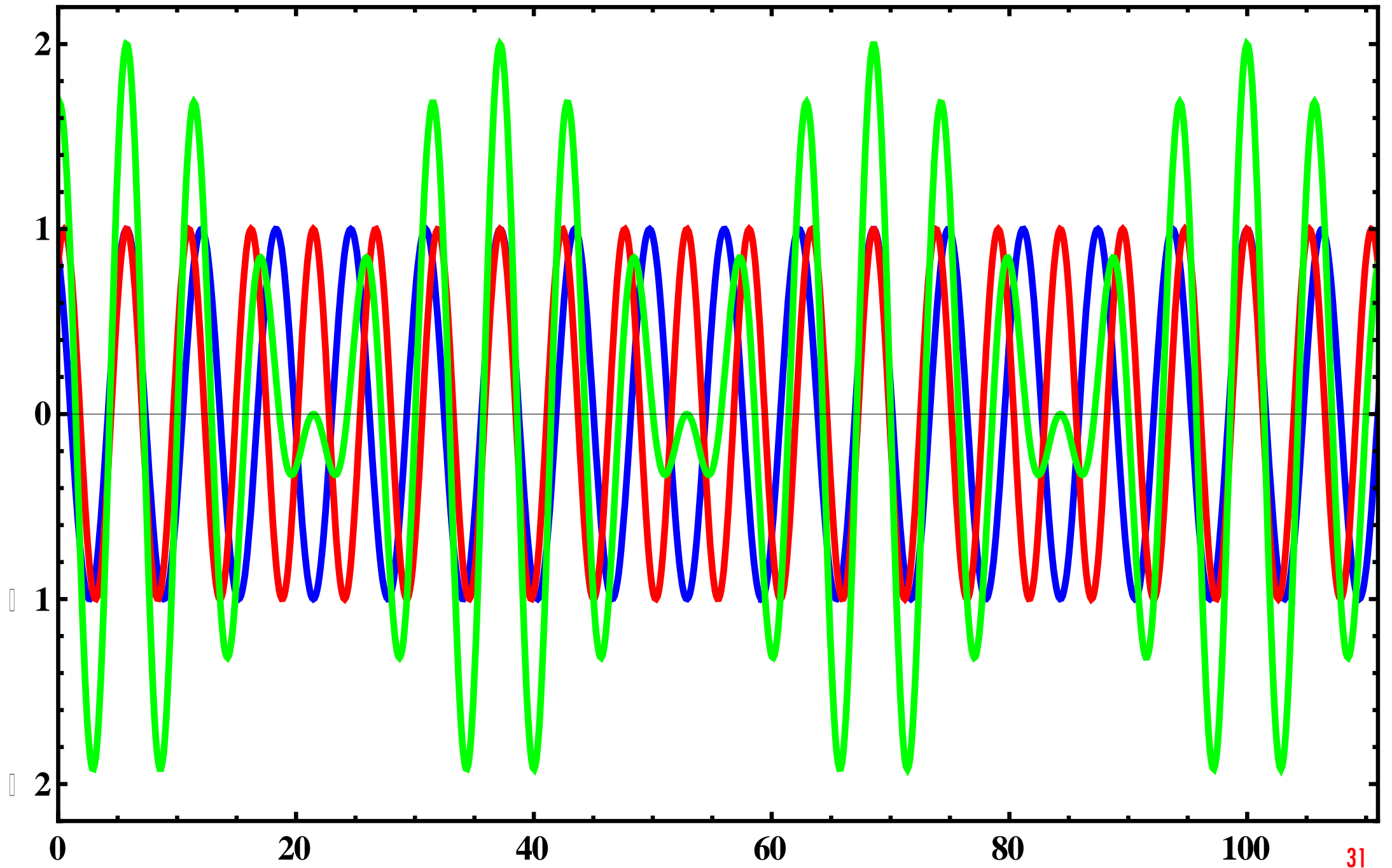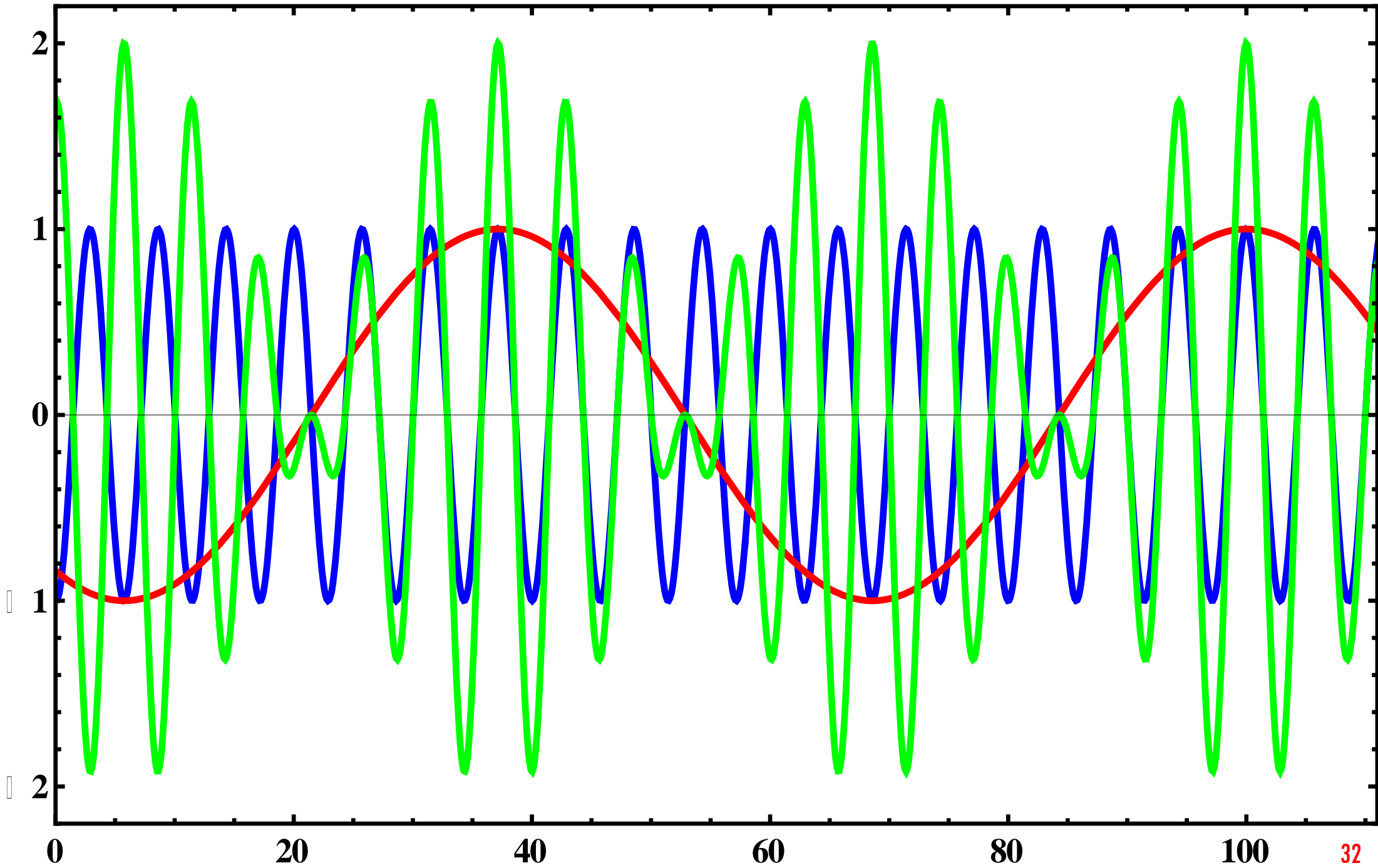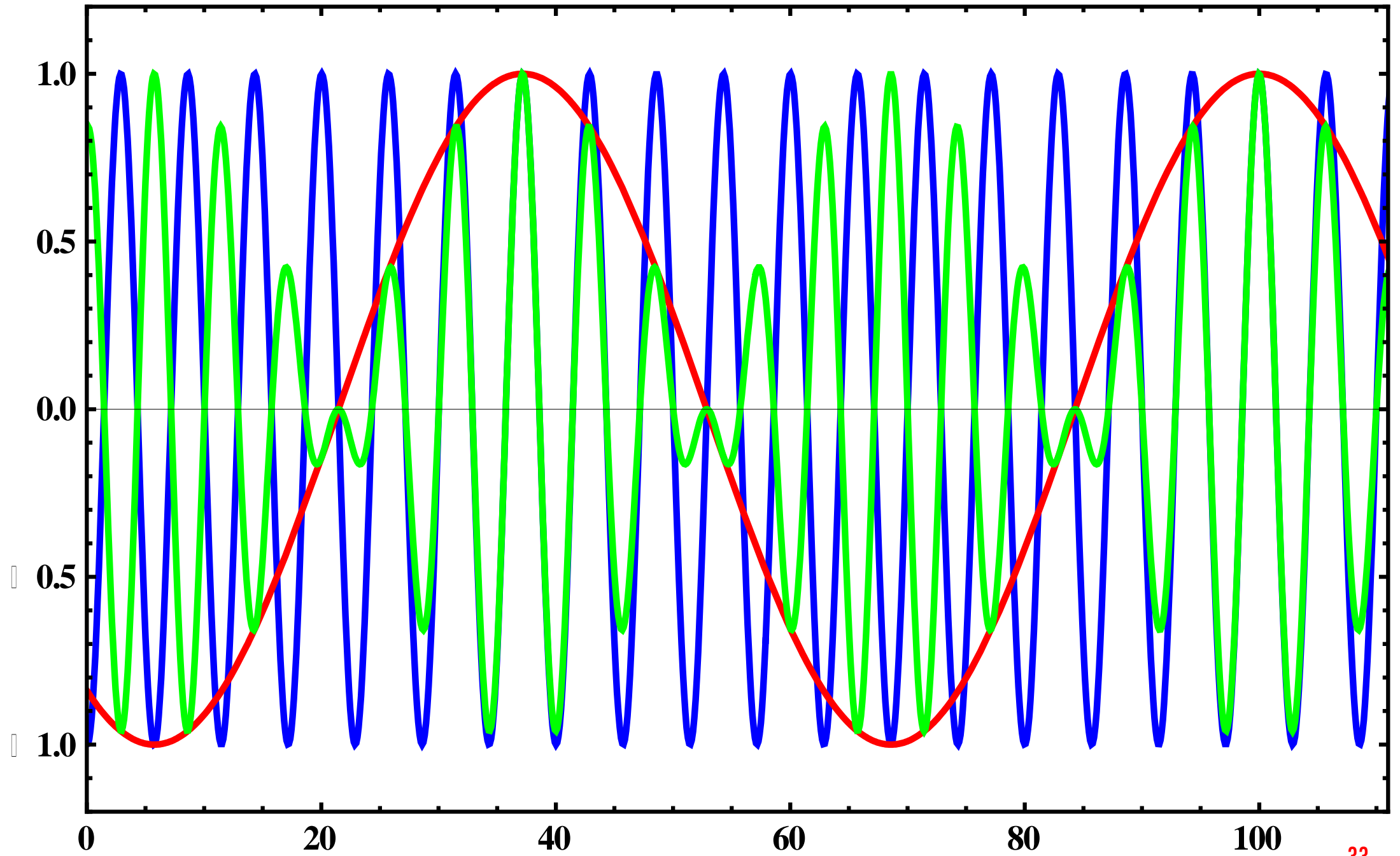
$$\omega_b = 2\omega_g = 2\left(\frac{\omega_1 - \omega_2}{2}\right) = \omega_1 - \omega_2 \qquad \textbf{\textcolor{purple}{Beat frequency}}$$

The overall effect is that the low-frequency wave serves as an envelope modulating the high-frequency wave.

Phase and Group velocity

The velocity of the higher-frequency wave is then the phase velocity,

$$v_p = \frac{\omega_p}{k_p} = \frac{\omega_1 + \omega_2}{k_1 + k_2} \cong \frac{\omega}{k}$$

the velocity of the envelope, called the group velocity,

$$v_g = \frac{\omega_g}{k_g} = \frac{\omega_1 - \omega_2}{k_1 - k_2} \cong \frac{d\omega}{dk}$$

$$v_g = \frac{d\omega}{dk} = \frac{d}{dk}(kv_p)$$

$$v_g = v_p + k\left(\frac{dv_p}{dk}\right)$$

When the velocity of a wave does not depend on wavelength, that is, in a non-dispersive medium, $dv_p/dk = 0$, and phase and group velocities are equal. This is the case of light propagating in a vacuum, where $Vp = Vg = c$. In dispersive media, however, $Vp = c/n$, where the refractive index n is a function of λ or k. Then $n=n(k)$, and

$$v_g = v_p\left[1 - \frac{k}{n}\left(\frac{dn}{dk}\right)\right] \qquad\qquad v_g = v_p\left[1 + \frac{\lambda}{n}\left(\frac{dn}{d\lambda}\right)\right]$$

In regions of normal dispersion, $dn/d\lambda < 0$ and $v_g < v_p$.

تابع ضریب شکست شیشه معمولی بر حسب طول موج به صورت زیر است:

$$n^2 = 1 + \frac{1.04\,\lambda^2}{\lambda^2 - 0.006} + \frac{0.23\,\lambda^2}{\lambda^2 - 0.02}$$

سرعت فاز را در به ازاء طول موج ۴۰۰ نانومتر (آبی) و ۷۰۰ نانومتر (قرمز) را حساب کنید:

$$\lambda = 0.4 \ \mu m \Rightarrow n^2 = 1 + \frac{1.04 \times 0.4^2}{0.4^2 - 0.006} + \frac{0.23 \times 0.4^2}{0.4^2 - 0.02} = 2.343 \Rightarrow n = 1.530$$

$$V = \frac{C}{n} = \frac{3 \times 10^8}{1.53} = 1.96 \times 10^8 \ \ m/s$$

$$\lambda = 0.7 \ \mu m \Rightarrow n^2 = 1 + \frac{1.04 \times 0.7^2}{0.7^2 - 0.006} + \frac{0.23 \times 0.7^2}{0.7^2 - 0.02} = 2.292 \Rightarrow n = 1.514$$

$$V = \frac{C}{n} = \frac{3 \times 10^8}{1.433} = 1.98 \times 10^8 \ \ m/s$$

مثال: سرعت گروه را برای طول موج ۴۰۰ و ۷۰۰ نانومتر حساب کنید.

$$\frac{dn}{d\lambda}\bigg|_{\lambda=0.4\ \mu m} = -0.1331\ \mu m^{-1}$$

$$\frac{dn}{d\lambda}\bigg|_{\lambda=0.7\ \mu m} = -0.0266\ \mu m^{-1}$$

$$V_g = V_p\left[1+\frac{\lambda}{n}\left(\frac{dn}{d\lambda}\right)\right]$$

$$V_g(\lambda=0.4\ \mu m)=1.96\times10^8\times\left[1+\frac{0.4}{1.53}\times(-0.1331)\right]=1.892\times10^8\ \ m/s$$

$$V_g(\lambda=0.7\ \mu m)=1.98\times10^8\times\left[1+\frac{0.7}{1.514}\times(-0.0266)\right]=1.955\times10^8\ \ m/s$$

$$\frac{\sin(\theta_i)}{\sin(\theta_r)} = \frac{n_r}{n_i} \Rightarrow \theta_r = \sin^{-1}\left(\frac{n_i}{n_r}\sin(\theta_i)\right)$$

زاویه شکست

از آنجایی که **ضریب شکست** هر محیط شفاف تابع **طول موج** نور منتشر شده درون آن است پس هنگام عبور یک پرتو نور سفید از مرز مشترک دو محیط شفاف، طول موجهای مختلف تحت زوایای مختلف شکسته می شوند طوری که رنگهای مختلف نور از یکدیگر جدا می شوند. به این پدیده پاشندگی نور گویند.
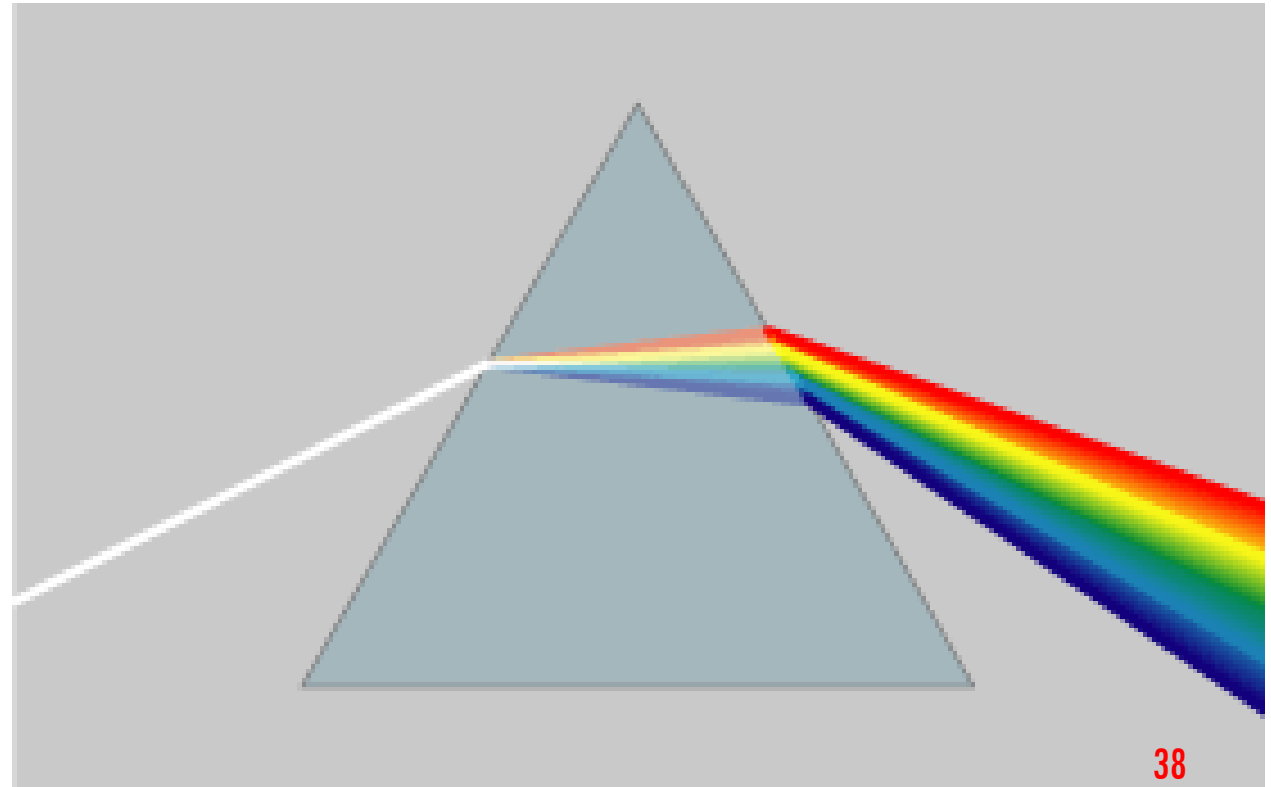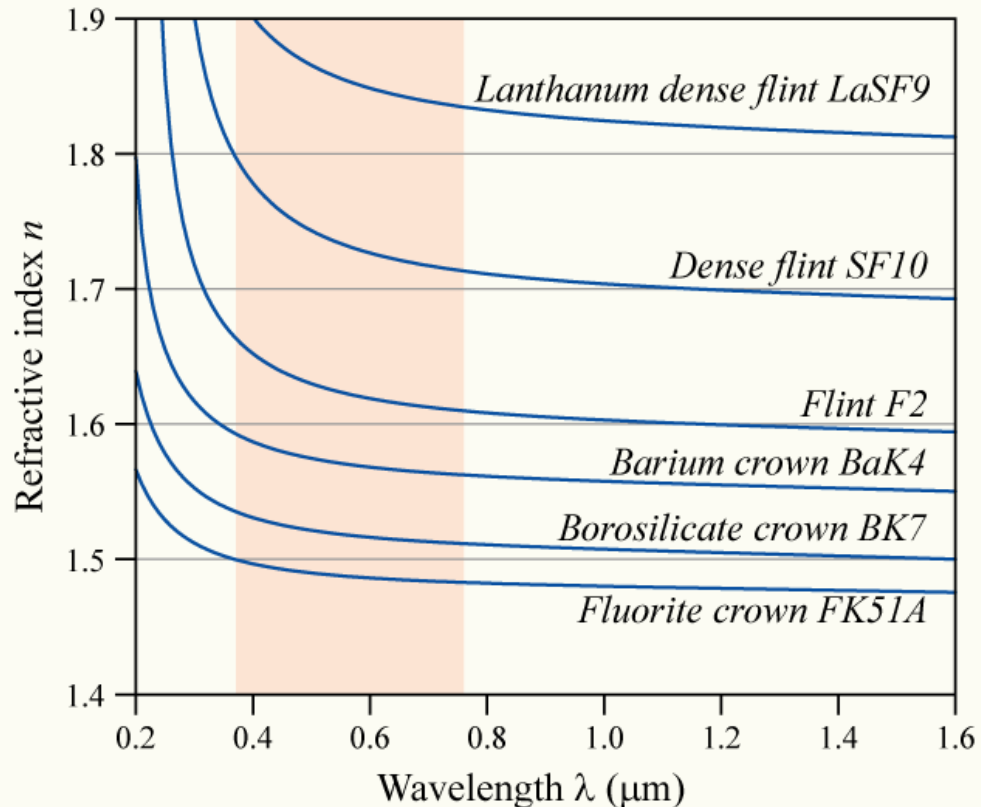
it is shown that for a given small angle

$$\frac{\sin\theta_i}{\sin\theta_r} = \frac{n_r}{n_i}: \text{ if } \theta_i \text{ is very samll} \Rightarrow \frac{\theta_i}{\theta_r} = \frac{n_r}{n_i}$$

$$\left(\theta_r^{red} - \theta_r^{blue}\right) \approx (n_B - n_R)$$

$$\begin{cases} n_B = \dfrac{n_r^{(Blue)}}{n_i^{(Blue)}} \text{ reletive refractive index for Blue} \\[4mm] n_R = \dfrac{n_r^{(Red)}}{n_i^{(Red)}} \text{ reletive refractive index for Red} \end{cases}$$

White light

θ_i

θ_r

Red

Yellow

Blue

while the deviation of the D ray depends on

$$\left(\theta_i - \theta_r^{yellow}\right) \approx (n_Y - 1)$$

The ratio of these two quantities is called the

dispersive power and is defined by the equation
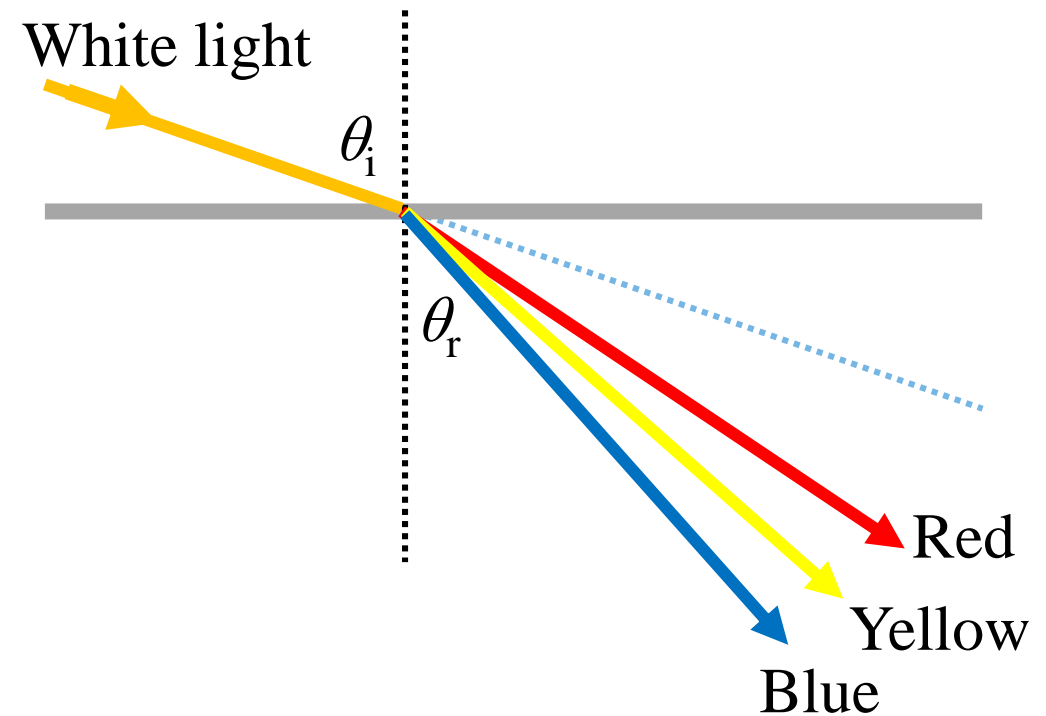
$$V = \frac{\left(\theta_r^{red} - \theta_r^{blue}\right)}{\left(\theta_i - \theta_r^{yellow}\right)} = \frac{(n_B - n_R)}{(n_Y - 1)}$$

λ=400 nm: n = 1.5308
λ=550 nm: n = 1.5185
λ=700 nm: n = 1.5131

$$V = \frac{1.5308 - 1.5131}{1.5185 - 1} = 0.034$$

λ=400 nm: n = 1.8454
λ=550 nm: n = 1.7912
λ=700 nm: n = 1.7718

$$V = 0.093$$

BK7 glass

SF11 glass
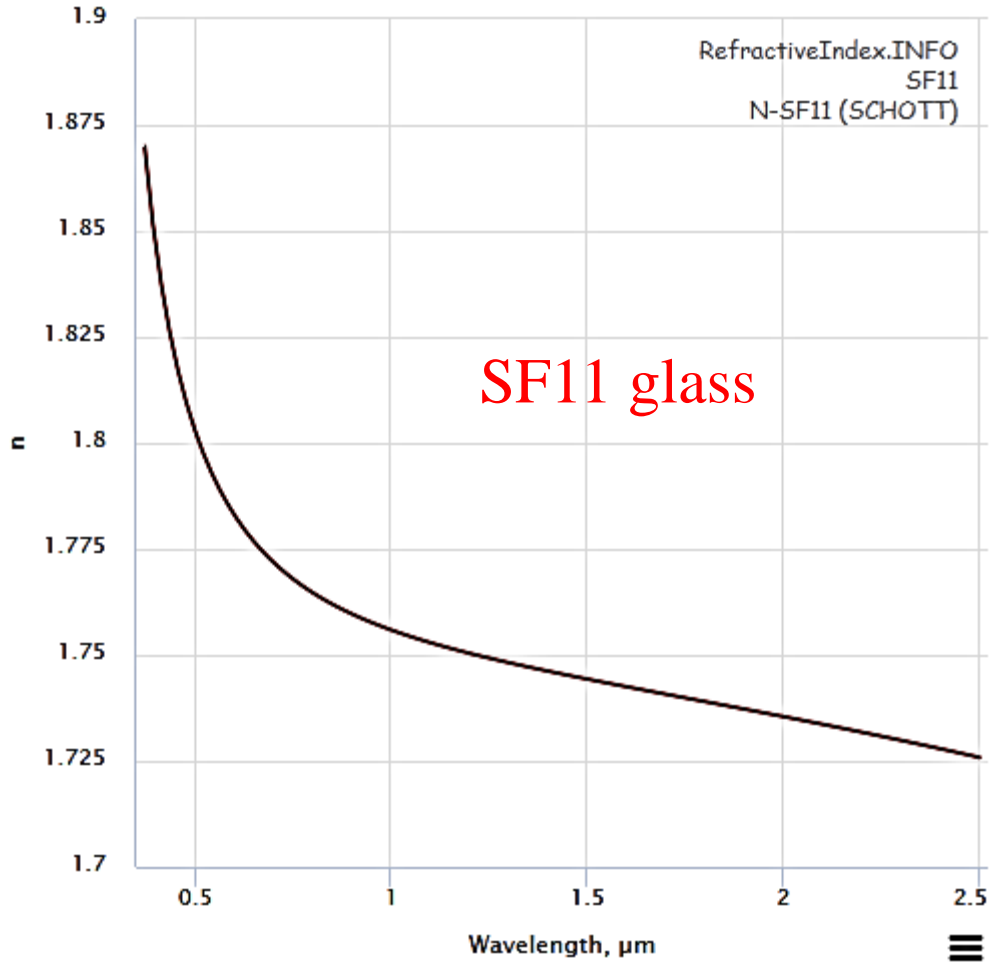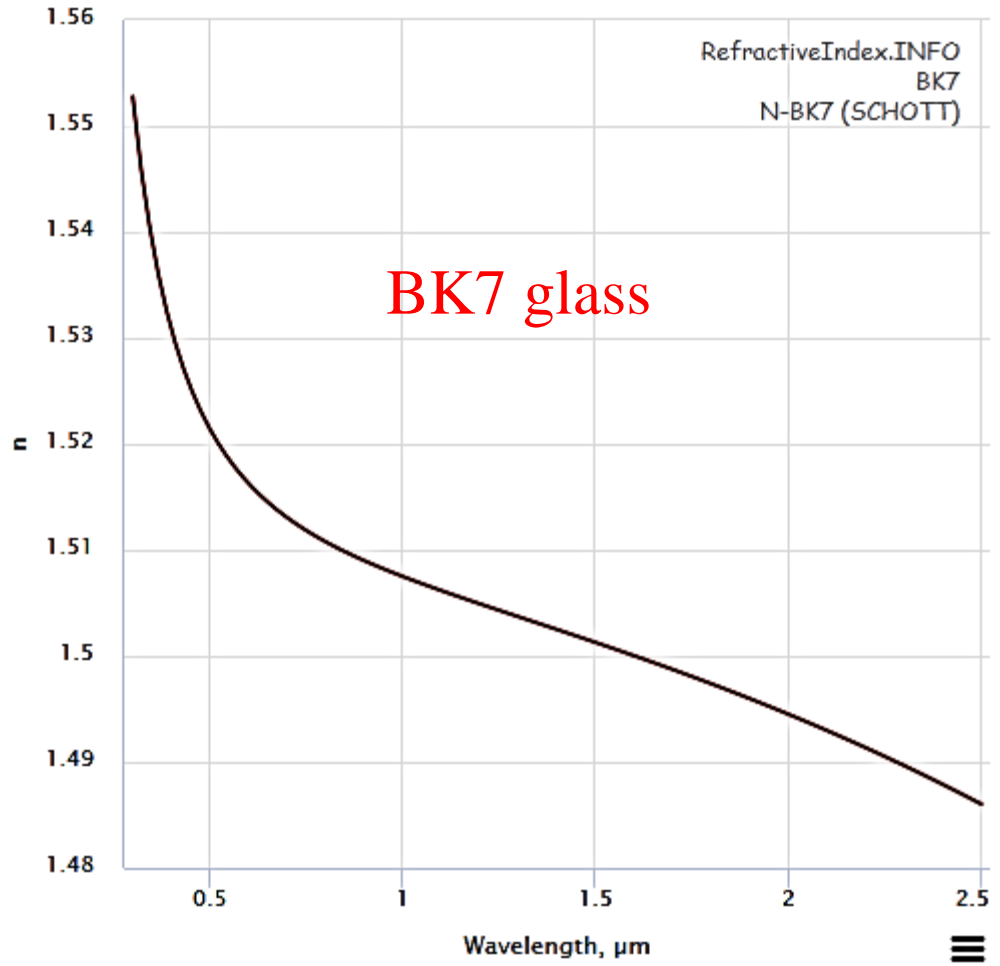
موج الکترومغناطیس متشکل از دو میدان نوسانی الکتریکی و مغناطیسی است که عمود بر یکدیگر و همچنین عمود بر راستای انتشار موج نوسان می کنند. راستای قطبش موج الکترومغناطیس همان راستای ارتعاش میدان الکتریکی قرارداد شده است.

انواع قطبش:

١. قطبش خطی

٢. قطبش دایره ای

٣. قطبش بیضوی

در قطبش خطی میدان الکتریکی در یک راستای ثابت نوسان می کند. در قطبش دایره ای و بیضوی، هرگاه در راستای انتشار پرتو به آن نگاه کنیم بردار میدان الکتریکی در صفحه عمود بر راستای انتشار با سرعت ثابت می چرخد.

$$\mathbf{E} = \mathbf{E_0}\exp(kz - \omega t)$$

$$\mathbf{E_0} = E_{0x}e^{i\phi_x}\,\hat{i} + E_{0y}e^{i\phi_y}\,\hat{j}$$

$$\Delta\phi = \phi_x - \phi_y = 0, \pi \qquad \text{linear polarization}$$

$$\begin{cases} \Delta\phi = \phi_x - \phi_y = \pm\dfrac{\pi}{2} \\ E_{0x} = E_{0y} \end{cases} \qquad \text{circular polarization}$$

$$\begin{cases} \Delta\phi = \phi_x - \phi_y = \pm\dfrac{\pi}{2} \\ E_{0x} \neq E_{0y} \end{cases} \qquad \text{elliptical polarization}$$

$$\Delta\phi = 0 \implies \phi_x = \phi_y$$

$$E_0 = E_{0x}\, e^{i\phi}\, \hat{i} + E_{0y}\, e^{i\phi}\, \hat{j}$$

$$E_0 = \left[E_{0x}\, \hat{i} + E_{0y}\, \hat{j} \right] e^{i\phi}$$

مقداری ثابت   حرایت   ثابت

در تغییر بردار E_0 که دامنه موجات

ثابت بوده یعنی راستای آن تغییر نمی کند

این نوع قطبش را قطبش خطی گویند

42

$$\Delta \phi = \Pi \Rightarrow \vec{E} = \left[E_{.x} \, e^{i\phi} \, \hat{i} + E_{.y} \, e^{i\phi} \cdot \underbrace{e^{i\Pi}}_{-1} \, \hat{j} \right] e^{i(Kz - \omega t)}$$

$$\vec{E} = \left(E_{.x} \, \hat{i} - E_{.y} \, \hat{j} \right) \cdot e^{i(Kz - \omega t + \phi)}$$

مُتَحَقِّق : $\vec{E} = \left(E_{.x} \, \hat{i} - E_{.y} \, \hat{j} \right) \cos \left[Kz - \omega t + \phi \right]$

دامنهٔ موج که یک بردار ثابت است

نشان دهندهٔ این است که راستای انتشار میدان الکتریکی ثابت است

که به این نوع از قطبش خطی گویند

هرگاه در راستای انتشار پرتو (بردار k)

در خلاف جهت انتشار در یک لحظه از زمان

به نقاط مختلف مقابل نگاه کنیم بردار میدان

الکتریکی و مغناطیسی بدین کونس مده خواهد شد.
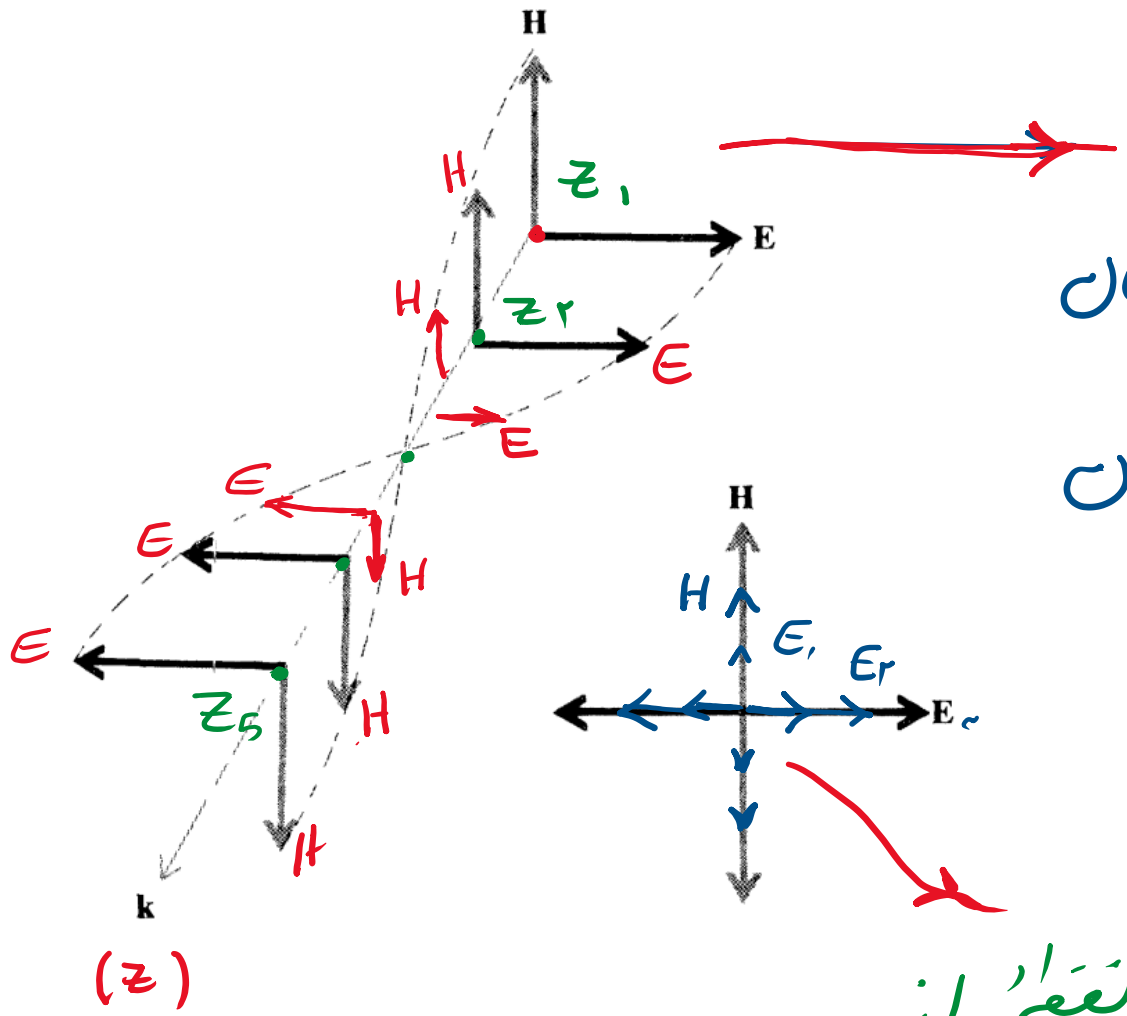
هرگاه در خلاف جهت انتشار در میدان به یک نقطه از

مقابل در گذر زمان نگاه کنیم بردارهای میدان الکتریکی و مغناطیسی بدین شکل مشاهده می کوند

(z)

H
z_1
E
H
z_2
E
E
E
E
z_5
H
H
k

H
E_1 E_2
E₃

در صفحه ی حفظ راستای ارتعاش میدان الکتریکی ثابت است . به عبارتی بردار دامنه ی موج ثابت است یعنی اندازه و جهت آن تغییر نمی کند . بسته به راستای ارتعاش می توان قطبش مغ را به دو نوع S و P دسته بندی کرد . ابتدا صفحه ی تابش را تعریف کنیم .

صفحه تابش: صفحه ای که توسط راستای پرتو تابشی و خط عمود بر نقطه تابش تشکیل می شود.

قطبش نوع S : هرگاه راستای ارتعاش میدان الکتریکی عمود بر صفحه تابش باشد.

قطبش نوع P : هرگاه راستای ارتعاش میدان الکتریکی مماس بر صفحه تابش باشد.

unpolarized
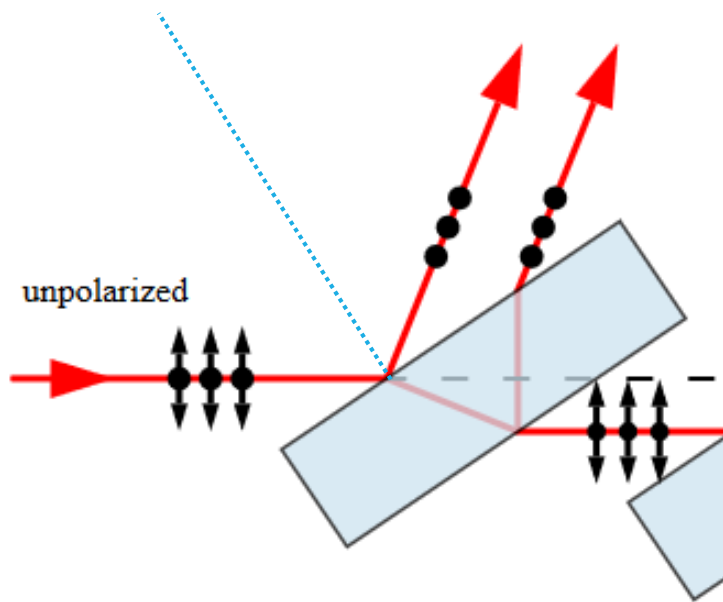
در شکل مقابل صفحه تابش مماس بر صفحه اسلاید است. پس نقاط نماینده قطبش S است که عمود بر صفحه تابش است و پیکانها نماینده قطبش P است که در صفحه تابش است.

$$\Delta \phi = \Pi/\gamma \qquad \longrightarrow \qquad \phi_y = \phi_x + \Pi/\gamma$$

$$E = \left(E_{0x} \, e^{i\phi} \, \hat{i} + E_{0y} \, e \cdot e^{i\Pi/\gamma} \, \hat{j} \right) e^{i(kz - \omega t)}$$

$$\underbrace{\phantom{e^{i\Pi/\gamma}}}_{i}$$

$$E = \left(E_{0x} \, \hat{i} + i \, E_{0y} \, \hat{j} \right) e^{i(kz - \omega t + \phi)}$$

$$\vec{E} = E_{0x} \cos(kz - \omega t + \phi) \, \hat{i} + E_{0y} \sin(kz - \omega t + \phi) \, \hat{j}$$

قطبش بیضوی : فقط مستقیم نمی‌

مشاهده می‌شود که مولفه‌ی x میدان کسینوسی و مولفه‌ی y آن سینوسی است یعنی وقتی مولفه‌ی x در حال افزایش است مولفه‌ی y درحال کاهش است و برعکس .

$$E_{0x} = E_{0y} \longrightarrow \text{قطبش دایره‌ای}$$

$$E = E_0 \left(\hat{i} - i\, \hat{j} \right) e^{i(kz - \omega t + \varphi)}$$

$$E = E_0 \left(\cos[kz - \omega t + \varphi]\, \hat{i} - \sin[kz - \omega t + \varphi]\, \hat{j} \right)$$

در قطبش دایره‌ای هرگاه در راستای انتشار پرتو نگاه کنیم بردار میدان الکتریکی روی یک دایره با سرعت زاویه‌ای ثابت ω می‌چرخد (در حالیکه اندازه این بردار ثابت است . در قطبش بیضوی علاوه برچرخش اندازه بردار نیز تغییر می‌کند .

در مقطع دایره‌ای یا بیضوی بردار میدان الکتریکی عمود بر راستای انتشار پرتو با چرخه سَیکلی به ... جهت چرخش آن را ==راستگرد== یا ==چپ‌گرد== نامند

هرگاه، خلاف جهت انتشار پرتو در مرکز لحظه به نقاط مختلف مقا نگاه کنیم بردارها، میدان الکتریکی در مقا میلی بدین صورت مشاهده حاصل که جنانچه نزد پیکانهای نمایشگر میدان الکتریکی را به هم وصل کنیم مسیر ==مارپیچ را راستگرد== (جهت بسته شدن بلا را انگشت دست راست) مشاهده خواهد ... ==مقطع دایره== راستگرد

چنانچه خلاف جهت انتشار پرتو به مرک نقطه از مقا نگاه کنیم مشاهده خواهد سه که بردار نمایشگر میدان الکتریکی با سرعت زاویه‌ای در ... در جهت ==چپ‌گرد== می‌چرخد.
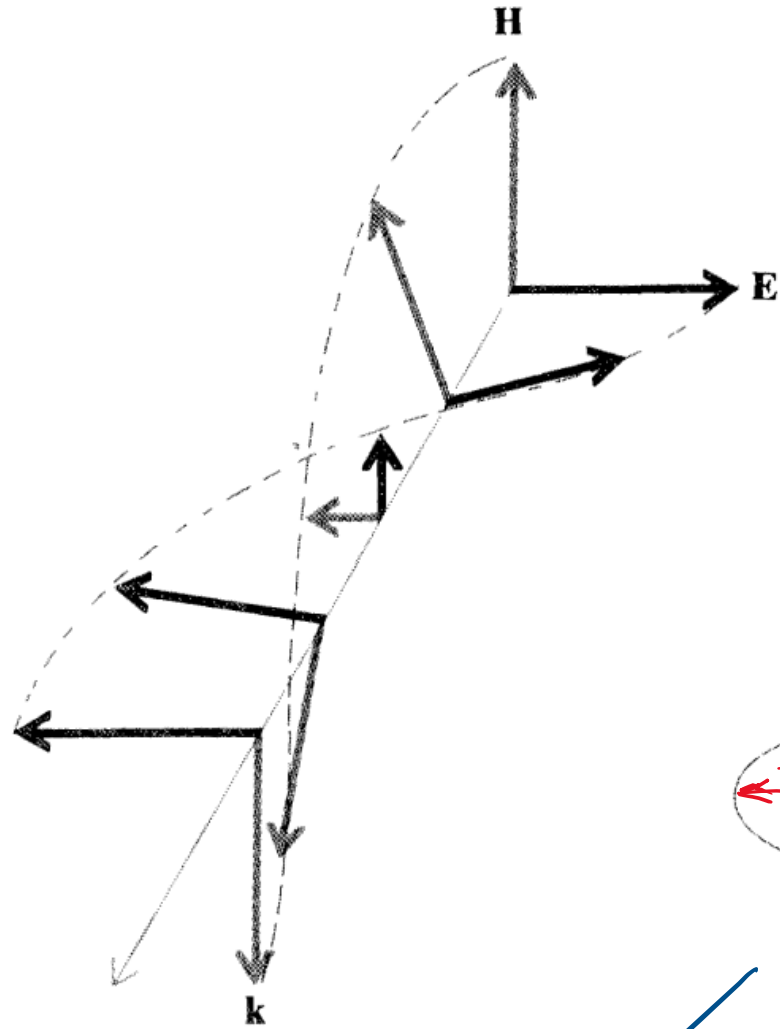
قطبش بیضوی راستگرد:

بردار میدان دلگرفته سطح بیرونی را جاروب

می‌کند طوری که جهت چرخش در جهت عقربه‌ها ساعت باشد

قطبش بیضوی چپگرد:

بردار میدان خلاف جهت عقربه‌های ساعت سطح بیرونی را جاروب می‌کند

(اندازه دامنه میدان ثابت نیست
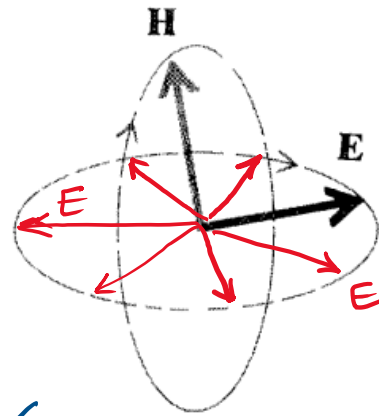
Polarizer

وسیله‌ای برای تبدیل نور غیر قطبیده به نور قطبیده خطی.

راستا ارتفاعی نور غیر قطبی به طور پیوسته و کاملا کاتوره‌ای (Random) تغییر می‌کند.

یک قطبیگر می‌داند که ماده‌ای باید که تا بتواند در راستا خاص را به مقدار زیاد جذب کرده و در راستا عمود بر این راستا دارای جذب بسیار پایین است پس دارای عبور بالا می؟ بله راستا عبور قطبیگر حال راستا قطبیگر آن به شه.
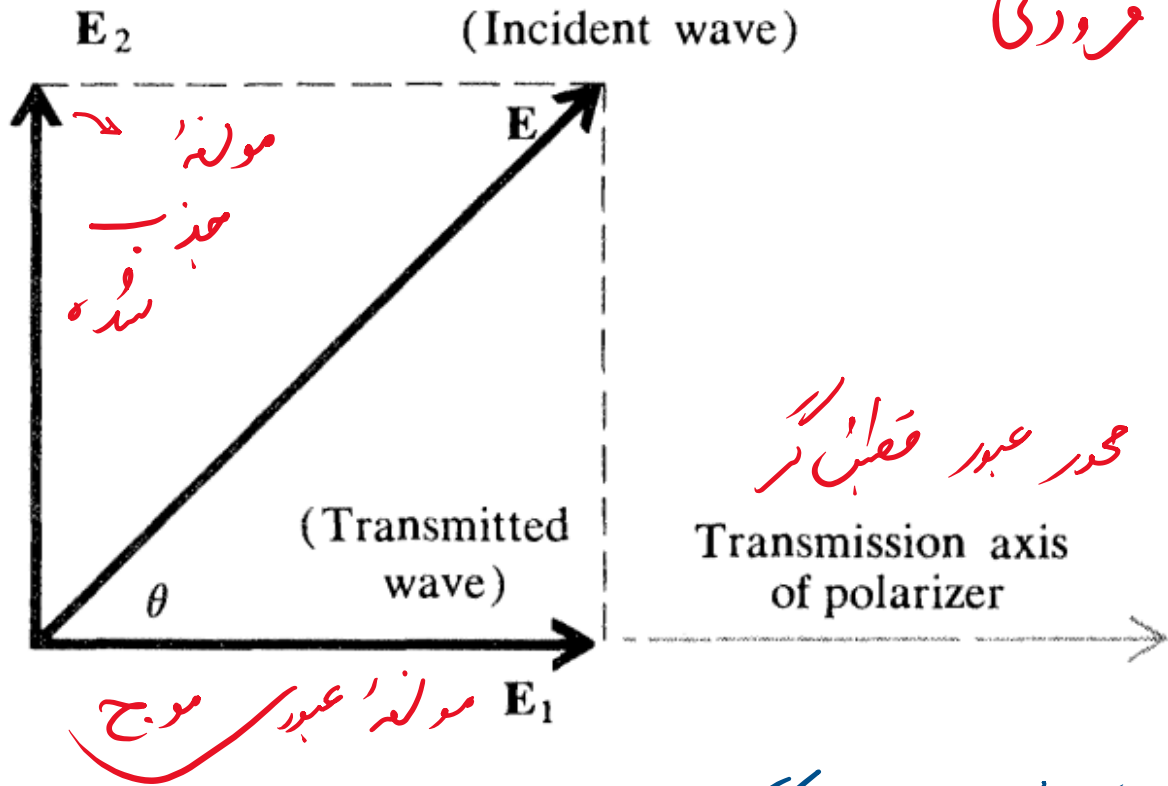
$$E_1 = E \cos \theta \qquad \text{موج فرودی}$$

θ زاویهٔ راستای میدان الکتریکی لحظه‌ای

با راستای (محور) عبورِ قطبش‌گر

$$I \sim E^2$$

E₂ — (Incident wave)

E — مولفهٔ جذب شده

(Transmitted wave) — محور عبورِ قطبش‌گر

Transmission axis of polarizer

مولفهٔ عبوری موج — **E₁**

$$I_1 = I \cos^2 \theta \quad \text{شدت عبوری از قطبش‌گر}$$

شدت فرودی روی قطبش‌گر

چون نابِ میر قطبیده زاویهٔ θ به‌طور تصادفی تغییر می‌کند پس با احتمال یکسان تمام مقادیر را می‌پذیرد

$$\langle I_1 \rangle = \langle I \cos^2 \theta \rangle = I \langle \cos^2 \theta \rangle = \frac{1}{2} I$$

پس شدت عبوری نصف فرودی است

51

اگر تابش وارد به قطبش‌گر غیر قطبیده باشد درحالت ایده‌آل ضریب عبور آن ٪50 خواهد بود

$$T = \frac{I_{tran}}{I_{inc}} = \frac{1}{2} = 50 \%$$

هرگاه، تابش ورود به قطبش‌گر دارآ قطبش خطی باشد ضریب عبور بسته به زاویه θ مقداری بین صفر تا ٪100 خواهد داشت

$$T = \frac{I_{tran}}{I_{in}} = \frac{I_{in} \cos^2 \theta}{I_{in}} = \cos^2 \theta$$

$$\theta = 0 \Rightarrow \cos\theta = 1 \Rightarrow T = 100\% \quad , \quad \theta = \pi/2 \Rightarrow \cos\theta = 0 \Rightarrow T = 0$$

میزان (درجهٔ) قطبیدگی: هر قطبشگر ایده‌آل درصد راست کامل تابش را عبور داده و در راستای عمود بر محور عبور کاملاً جاذب است. لکن هیچ قطبشگری ایده‌آل نیست پس میزان یا درجهٔ قطبیدگی را به صورت زیر تعریف می‌کند

$$P = \frac{I_{Pol}}{I_{Pol} + I_{unpol}}$$

← شدت تابش عبوری
شدت تابش عبوری غیر قطبیده
قطبیده

هرگاه قطبشگر را حول محور انتشار نور
°۳۶۰ بچرخانیم و کمترین و بیشترین شدت عبوری
را اندازه‌گیری کنیم میزان نور؛

میزان قطبیدگی $\quad P = \frac{I_{max} - I_{min}}{I_{max} + I_{min}}$

تعریف درجه (میزان قطبیدگی) polarizing power: $p = \dfrac{I_{pol}}{I_{pol} + I_{unpol}}$

تمرین با توجه به تعریف بالا ثابت کنید:

$$p = \frac{I_{Max} - I_{Min}}{I_{Max} + I_{Min}}$$

این رابطه بر حسب بیشینه و کمینه شدت عبوری از قطبشگر است هرگاه

آن را بیش از ۱۸۰ درجه حول راستای تابش فرودی بچرخانیم.

Half wave Plate
quarter wave Plate

تیغهٔ نیم موج
تیغهٔ چهارک موج

این تیغه‌ها مختصات نُضُفی هستند که ضریب شکست آنها در دو راستای عمود بر لبهٔ آن مختلف می‌باشد. جنس ماده دو شکسته هستند مانند بلور کلسیت

توسط تیغهٔ نیم موج می‌توان راستای قطبش یک پرتوِ مستقیم خطی را تا °۹۰ چرخاند

توسط یک تیغهٔ ربع موج (چهارک موج) می‌توان قطبش خطی را به قطبش بیضوی (دایره) راست‌گرد و یا چپ‌گرد تبدیل کرد.

55

Incident unpolarized light

Linear polarizer

Transmission axis at 45°

Linearly polarized light

E

45°

Fast axis

Quarter-wave plate

Slow axis

E

Emergent left, circularly polarized light

راستا از تیغه‌ای که دارا ضریب شکست کمتر است راستا تندتر می‌نامند چون طبق رابطه

$$V = \frac{c}{n}$$

سرعت انتشار نور در این راستا سریعتر است و راستا یا از تیغه‌ای که دارای ضریب شکست بیشتر است را راستا (محور) کند می‌نامند

چنانچه محور عبور قطبشگر زاویهٔ ۴۵ با محور کند تیغهٔ ربع موج بسازد تابش خروجی دارا قطبش دایره‌ای چپگرد خواهد بود و اگر این زاویه ۱۳۵ باشد قطبش دایره‌ای راستگرد خارج خواهد شد. هر زاویهٔ دیگری منجر به قطبش بیضوی خواهد شد.

تابش غیرقطبیده به قطبشگر وارد می‌شود

تابش عبور کرده از قطبشگر قطبیده خطی است

56

به علّت تفاوت ضریب شکست در دو محیط تُند می‌کند تا پرتو با قطبش عمود مسافرت در راستگاه تُند می‌کند راه، اینکه مختلفی را تجربه کرده، و هنگام خروج اختلاف راه اینکه با عبر اختلاف فاز شده، چنانچه تیغه مولّیا تنظیم گردد که اختلاف فاز ایجاد شه، پلاریزگرد در قطبش ورود عمود به قطبش دایره‌ای (بیضوی) در خروج تبدیل می‌گردد

$$\triangle = n d \quad \text{راه اینکه}$$

تیغه تماس

$$n_{\text{r}} d - n_{1} d = (n_{\text{r}} - n_{1}) d \quad \Longleftarrow \text{اختلاف راه اینکه}$$

$$\triangle \phi = K \triangle = \frac{2\pi}{\lambda} \cdot (n_{\text{r}} - n_{1}) d$$

$$\Rightarrow \frac{2\pi}{\lambda} \cdot (n_{\text{r}} - n_{1}) d = \frac{\pi}{\text{r}} \Rightarrow$$

$$\triangle \phi = \pi/\text{r} : \qquad \text{خطّی} \rightarrow (1.0.1)$$

تیغه تغییر ربع موج

$$d = \frac{\lambda}{4(n_{2} - n_{1})}$$

برای آنکه راسته مقابل صفر را تغییر دهیم باید اختلاف فاز بین دو مولفه صفحه در راستای عمود

شند و کند هنگام خروج از تیغه به اندازه $\boxed{\pi}$ شود

$$\Delta = (n_2 - n_1) d$$

اختلاف راه ابتکه

$$\Delta \phi = k \Delta = \frac{2\pi}{\lambda} \cdot (n_2 - n_1) d$$

$$\Delta \phi = \pi \implies \text{چرخش صفحه صفر}$$

ضخامت تیغه نیم موج

$$\frac{2\pi}{\lambda} \cdot (n_2 - n_1) d = \pi \implies \boxed{d = \frac{\lambda}{2(n_2 - n_1)}}$$

کاربرد تیغه نیم موج:

هرگاه راستای قطبش تابش در راستای محور تند یا کند تیغه نیم موج باشد خروجی دارای قطبشی یکسان با تابش ورودی خواهد بود. اگر با یکی از محورها زاویه بسازد قطبش تابش خروجی دو برابر این زاویه نسبت به ورودی چرخیده است.

پس اگر راستای قطبش تابش فرودی با محور تند یا کند تیغه نیم موج زاویه ۴۵ درجه بسازد قطبش خروجی ۹۰ درجه نسبت به ورودی خواهد چرخید.

کابرد تیغه ربع موج:

تبدیل قطبش خطی به قطبش بیضوی یا دایره‌های (راستگرد یا چپگرد)

$$\mathbf{E_0} = E_{0x}\,\hat{i} + E_{0y}\,\hat{j}$$

در حالت کلی مولفه های بردار دامنه میدان می توانند مختلط باشند.

$$\mathbf{E_0} = \left|E_{0x}\right|e^{i\varphi_x}\,\hat{i} + \left|E_{0y}\right|e^{i\varphi_y}\,\hat{j}$$

هر عدد مختلط را می توان بر حسب اندازه آن و یک عامل فازی نوشت

$$\mathbf{E_0} = \begin{bmatrix} E_{0x} \\ E_{0y} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \left|E_{0x}\right|e^{i\varphi_x} \\ \left|E_{0y}\right|e^{i\varphi_y} \end{bmatrix}$$

این فرم نوشتاری به ماتریسهای جونز معروف است.

linear polarization: $\Delta\varphi = 0$

$$\mathbf{E_0} = E_0 \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} : \text{Jones vector for linearly polarized in } x \text{ direction}$$

$$\mathbf{E_0} = E_0 \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} : \text{Jones vector for linearly polarized in } y \text{ direction}$$

$$\mathbf{E_0} = E_0 \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} \quad \text{linearly polarized in } x \text{ - } y \text{ plane with angle of 45 deg verusu to } x \text{ axis}$$

circular polarization: $\Delta\varphi = \dfrac{\pi}{2}$

$\mathbf{E_0} = E_0 \begin{bmatrix} 1 \\ -i \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} 1 \\ -i \end{bmatrix}$: Jones vector for left circularly polarized

$\mathbf{E_0} = E_0 \begin{bmatrix} 1 \\ i \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} 1 \\ i \end{bmatrix}$: Jones vector for right circularly polarized

نمادگذاری جونز کاربردهای جالبی دارد. مثلا به سادگی می توان حساب کرد که اگر دو تابش با قطبش های معلوم با یکدیگر برهم نهی داشته باشند تابش حاصل دارای چه نوع قطبشی خواهد بود.

حاصل برهم نهی دو موج قطبیده راستگرد و چپگرد هم دامنه:

$\begin{bmatrix} 1 \\ -i \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 \\ i \end{bmatrix} = 2\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$ تابشی قطبیده خطی در راستای محور x با دامنه ای دو برابر دامنه هر کدام از تابشهای اولیه

از دیگر کاربردهای نمادگذاری جونز تعریف ماتریس جونز برای هر قطعه اپتیکی است طوریکه تاثیر تغییر قطبش تابش ورودی را نشان دهد. بدین منظور یک ماتریس ۲×۲ برای هر قطعه اپتیکی تعریف می شود.

$$\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A \\ B \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A' \\ B \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$$: Jones Matrix of the optical element

$$\begin{bmatrix} A \\ B \end{bmatrix}$$: incident polarixation

$$\begin{bmatrix} A' \\ B \end{bmatrix}$$: output polarixation

Linear polarizer
$\begin{cases} \text{Transmission axis horizontal} & \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \\ \\ \text{Transmission axis vertical} & \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \\ \\ \text{Transmission axis at } \pm 45° & \dfrac{1}{2}\begin{bmatrix} 1 & \pm 1 \\ \pm 1 & 1 \end{bmatrix} \end{cases}$

Quarter-wave plate
$\begin{cases} \text{Fast axis vertical} & \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -i \end{bmatrix} \\ \\ \text{Fast axis horizontal} & \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & i \end{bmatrix} \\ \\ \text{Fast axis at } \pm 45° & \dfrac{1}{\sqrt{2}}\begin{bmatrix} 1 & \pm i \\ \pm i & 1 \end{bmatrix} \end{cases}$

Half-wave plate $\begin{cases} \text{Fast axis either vertical} \\ \text{or horizontal} \end{cases}$ $\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$

Circular polarizer
$\begin{cases} \text{Right} & \dfrac{1}{2}\begin{bmatrix} 1 & i \\ -i & 1 \end{bmatrix} \\ \\ \text{Left} & \dfrac{1}{2}\begin{bmatrix} 1 & -i \\ i & 1 \end{bmatrix} \end{cases}$

مثال: تابشی طبیده خطی با زاویه ۴۵ درجه وارد یک تیغه چهارک موج می شود. نوع قطبش خروجی را تعیین کنید:

fast axis horisontal: $\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & i \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ i \end{bmatrix}$ left circularly polarized

fast axis vertical: $\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -i \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ -i \end{bmatrix}$ right circularly polarized

Orthogonal Polarization

قطبش متعامد (عمود بر هم):

هرگاه شرط زیر برای بردار میدان الکتریکی دو تابش قطبیده برقرار باشد قطبش آنها را متعامد گویند:

$$\mathbf{E}_1 \cdot \mathbf{E}_2^* = 0$$

In terms of Jones vectors it is easy to verify that $\begin{bmatrix} A_1 \\ B_1 \end{bmatrix}$ and $\begin{bmatrix} A_2 \\ B_2 \end{bmatrix}$ are orthogonal if

$$A_1 A_2^* + B_1 B_2^* = 0$$

$$\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}^* = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} = 0 - 0 = 0$$

مثلا دو قطبش خطی در راستاهای x و y متعامد هستند.

این تعریف عامتر از تعامد هندسی است به طوری که مثلا دو قطبش دایره ای راستگرد و چپگرد نیز متعامد به حساب می آیند.

$$\begin{bmatrix} \text{Jones vector of} \\ \text{left circularly polarized} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \text{Jones vectore of} \\ \text{right circularly polarized} \end{bmatrix}^* = 0$$

$$\begin{bmatrix} 1 \\ i \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ -i \end{bmatrix}^* = \begin{bmatrix} 1 \\ i \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ i \end{bmatrix} = 1 - 1 = 0$$

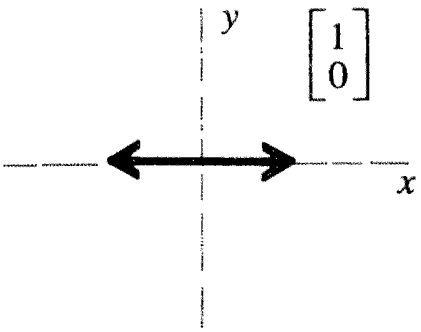و یا مثلا جفت حالت قطبش بیضوی $\begin{bmatrix} 2 \\ i \end{bmatrix}$ و $\begin{bmatrix} 1 \\ -2i \end{bmatrix}$ متعامد هستند چرا که:

$$\begin{bmatrix} 2 \\ i \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ -2i \end{bmatrix}^* = \begin{bmatrix} 2 \\ i \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ 2i \end{bmatrix} = 2 - 2 = 0$$

با تعریف قطبش های متعامد حال می توان گفت که هر نوع قطبش دلخواه را می توان به دو مولفه متعامد تقسیم کرد:

تقسیم یک قطبش دلخواه به دو قطبش خطی با دامنه های حقیقی در

$$\begin{bmatrix} A \\ B \end{bmatrix} = A \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} + B \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$
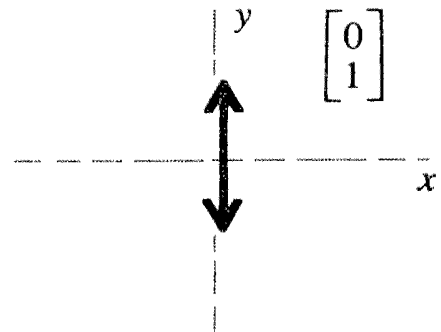
راستای محور x و محور y

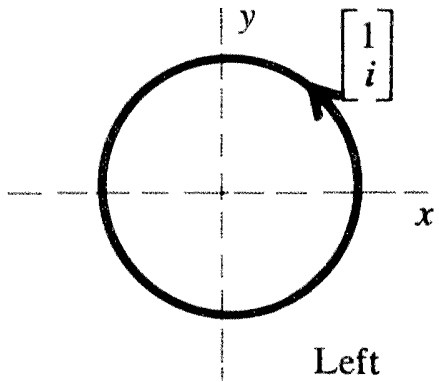تقسیم یک قطبش دلخواه به دو قطبش دایره ای راستگرد و چپگرد با دامنه های مختلط

$$\begin{bmatrix} A \\ B \end{bmatrix} = \frac{1}{2} (A + iB) \begin{bmatrix} 1 \\ -i \end{bmatrix} + \frac{1}{2} (A - iB) \begin{bmatrix} 1 \\ i \end{bmatrix}$$
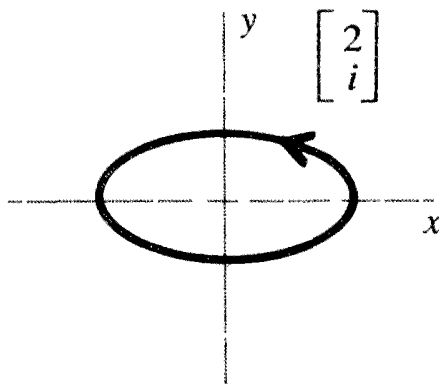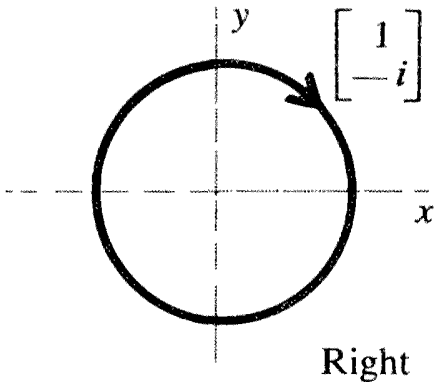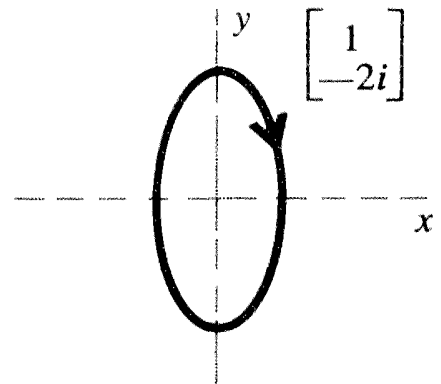
نمونه هایی از جفت قطبش های متعامد

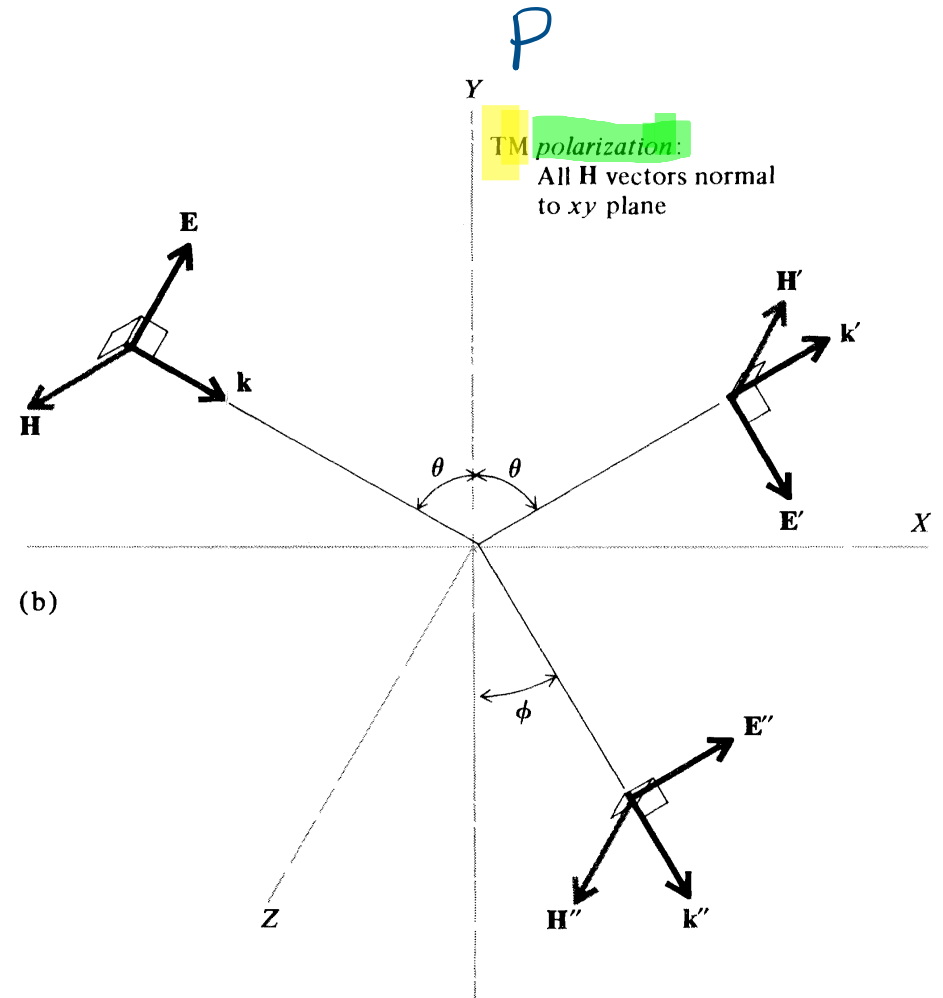# Amplitudes of Reflected and Refracted Waves .

S

TE polarization: All **E**-vectors normal to xy plane

(a)

ویرو تابش

ویرو بازتابش

ویرو شکست

P

TM polarization: All **H** vectors normal to xy plane

(b)
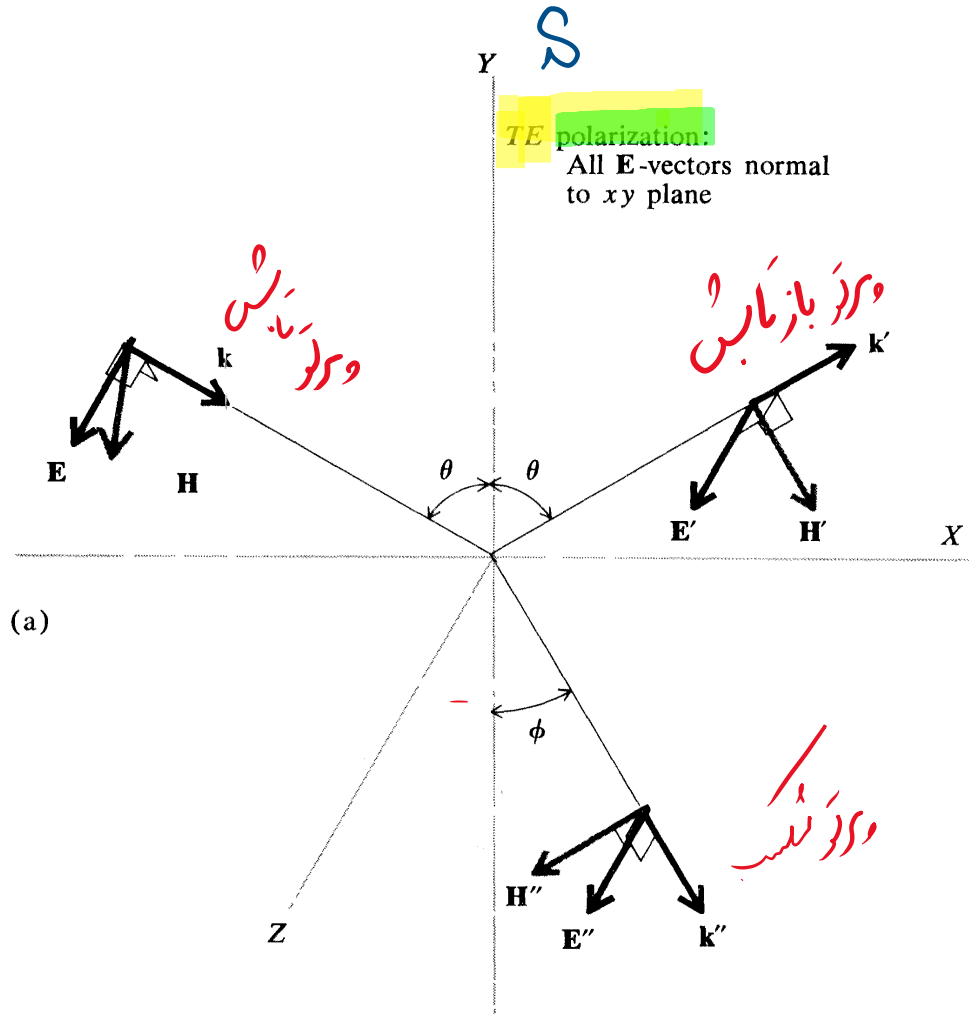
$$r_s = \left[\frac{E'}{E}\right]_{TE} \qquad r_p = \left[\frac{E'}{E}\right]_{TM}$$

ضرایب بازتاب و عبور برای دو قطبش نوع (TE==S) و (TM==P)

$$t_s = \left[\frac{E''}{E}\right]_{TE} \qquad t_p = \left[\frac{E''}{E}\right]_{TM}$$

به صورت زیر تعریف می شود.

$$r_s = \frac{\cos\theta - n\cos\phi}{\cos\theta + n\cos\phi}$$

اعمال شرایط مرزی منجر به محاسبه ضرایب بازتاب برای هر دو نوع قطبش بر حسب زاویه تابش،

زاویه شکست و ضریب شکست نسبی می گردد.

$$r_p = \frac{-n\cos\theta + \cos\phi}{n\cos\theta + \cos\phi}$$

$$n = \frac{n_2}{n_1}$$ ضریب شکست نسبی

توجه: این ضرایب درصد بازتاب و عبور میدان الکتریکی را می دهد. برای محاسبه درصد بازتاب و عبور شدت تابش این ضرایب باید

به توان ۲ برسد چون شدت تابش متناسب به مجذور میدان الکتریکی است.

$$r_s = \frac{\cos\theta - \sqrt{n^2 - \sin^2\theta}}{\cos\theta + \sqrt{n^2 - \sin^2\theta}}$$

با استفاده از قانون اسنل-دکارت می توان ضرایب بازتاب را بر حسب زاویه تابش و

$$r_p = \frac{-n^2\cos\theta + \sqrt{n^2 - \sin^2\theta}}{n^2\cos\theta + \sqrt{n^2 - \sin^2\theta}}$$

ضریب شکست نسبی محاسبه کرد.

$$r_s = -\frac{\sin(\theta - \phi)}{\sin(\theta + \phi)}$$

با استفاده از قانون اسنل-دکارت همچنین می توان ضرایب بازتاب را بر حسب زاویه

$$r_p = -\frac{\tan(\theta - \phi)}{\tan(\theta + \phi)}$$

تابش و زاویه شکست محاسبه کرد.

قرارداد: هرگاه در عبور از یک مرز، ضریب شکست نسبی بیشتر از ۱ باشد بازتاب را خارجی گویند و

هرگاه در عبور از یک مرز، ضریب شکست نسبی کمتر از ۱ باشد بازتاب را داخلی گویند

Snel Law: $\sin(\theta) = n \sin(\phi)$

internal reflection: $n \langle 1 \Rightarrow \phi \rangle \theta$

$\phi = 90° : \theta = \theta_c \Rightarrow \sin(\theta_c) = n$

زاویه حد: زاویه تابشی که زاویه شکست متناظر با آن ۹۰ درجه باشد.

این پدیده در بارتابش داخلی رخ می دهد.

Total Internal Reflection

در بازتاب داخلی چنانچه زاویه تابش بیش از زاویه حد گردد آنگاه ضرایب بازتاب میدان مختلط خواهند شد:

$$\sin(\theta_c) = n : \theta \rangle \theta_c \Rightarrow \sin(\theta) \rangle n \Rightarrow \sqrt{n^2 - \sin^2(\theta)} = i \sqrt{\sin^2(\theta) - n^2}$$

$$r_s = \frac{\cos\theta - i \sqrt{\sin^2\theta - n^2}}{\cos\theta + i \sqrt{\sin^2\theta - n^2}}$$

$$r_p = \frac{-n^2 \cos\theta + i \sqrt{\sin^2\theta - n^2}}{n^2 \cos\theta + i \sqrt{\sin^2\theta - n^2}}$$

$$R_s = |r_s|^2 = \left|\frac{E'}{E}\right|^2_{TE}$$

ضریب بازتاب شدت تابش که عملا قابل اندازه گیری است به صورت زیر تعریف می شود

$$R_p = |r_p|^2 = \left|\frac{E'}{E}\right|^2_{TM}$$

چون شدت متناسب با مجذور میدان است:

$$R = r\, r^*$$

Total internal reflection: $\theta \rangle \theta_c \Rightarrow \begin{cases} R_s = 1 \\ R_p = 1 \end{cases}$

در بازتابش داخلی هرگاه زاویه تابش بیش از زاویه حد باشد کل انرژی تابش از مرز بازتابیده خواهد شد و به محیط اولیه بازمی گردد. به این پدیده بازتابش کلی داخلی گویند.

حالت خاص تابش عمود: در این حالت ضریب بازتاب برای هر دو نوع قطبش یکسان می باشد و البته کمترین مقدار بازتابش نیز در این حالا رخ می دهد.

$$R_s = R_p = \left[\frac{n-1}{n+1}\right]^2$$

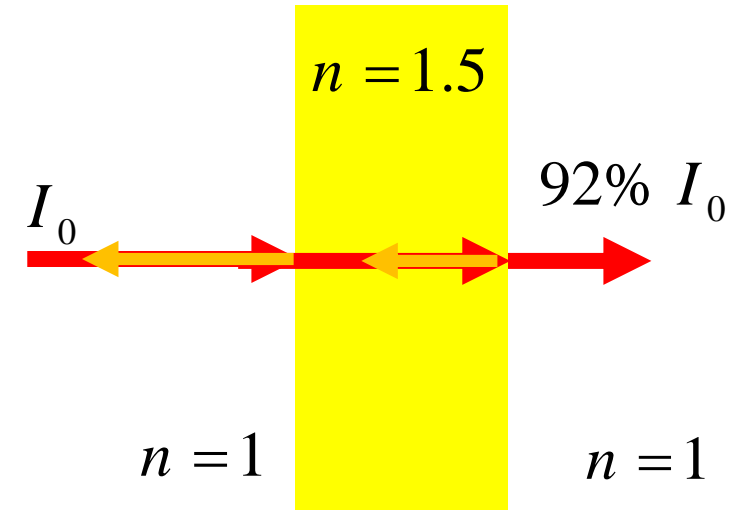مثال: در عبور نور از شیشه به ضریب شکست ۱.۵ چند درصد انرژی تابشی عبور می کند هرگاه پرتو عمود بر سطح شیشه بتابد.

$$R = \left(\frac{n-1}{n+1}\right)^2$$

External reflection: $R = \left(\frac{3/2-1}{3/2+1}\right)^2 = 0.04 = 4\%$

Internal reflection: $R = \left(\frac{2/3-1}{2/3+1}\right)^2 = 0.04 = 4\%$

$n = 1.5$

$92\% \; I_0$

I_0

$n = 1$ $n = 1$

net reflection$= 4\% + 4\% = 8\%$

net transmision $= 100\% - 8\% = 92\%$

البته در این محاسبه از بازتابهای تکراری بین دو مرز صرف نظر شده است.

هرگاه موج الکترومغناطیس بخواهد از یک محیط شفاف وارد محیط شفاف دیگر شود در مرز بین آن دو محیط درصدی از آن بازتاب شده و بقیه عبور می‌کند. ضرایب فرنل بازتاب و عبور به ضریب شکست دو محیط، زاویه تابش و نوع قطبش بستگی دارند.

$$R_s = \left| \frac{\cos(\theta) - n\cos(\phi)}{\cos(\theta) + n\cos(\phi)} \right|^2 \quad (1) \qquad R_p = \left| \frac{n\cos(\theta) - \cos(\phi)}{n\cos(\theta) + \cos(\phi)} \right|^2 \quad (2)$$

$$R_s = \left| \frac{\sin(\theta - \phi)}{\sin(\theta + \phi)} \right|^2 \quad (3) \qquad\qquad R_p = \left| \frac{\tan(\theta - \phi)}{\tan(\theta + \phi)} \right|^2 \quad (4)$$

در حالتی که $\phi + \theta = 90$ حاصل معادله (۴) یعنی ضریب بازتاب قطبش نوع P صفر می‌شود. یعنی موج بازتابیده قطبیده کامل از نوع S است و موج عبوری قطبیده جزئی از نوع P است. زاویه تابشی که این پدیده رخ می‌دهد به زاویه بروستر معروف است.

$$\theta_B + \phi = 90$$

$$\sin(\theta_B) = n\sin(\phi) \Rightarrow \sin(\theta_B) = n\sin(90 - \theta_B) = n\cos(\theta_B) \Rightarrow \tan(\theta_B) = n = \frac{n_2}{n_1}$$
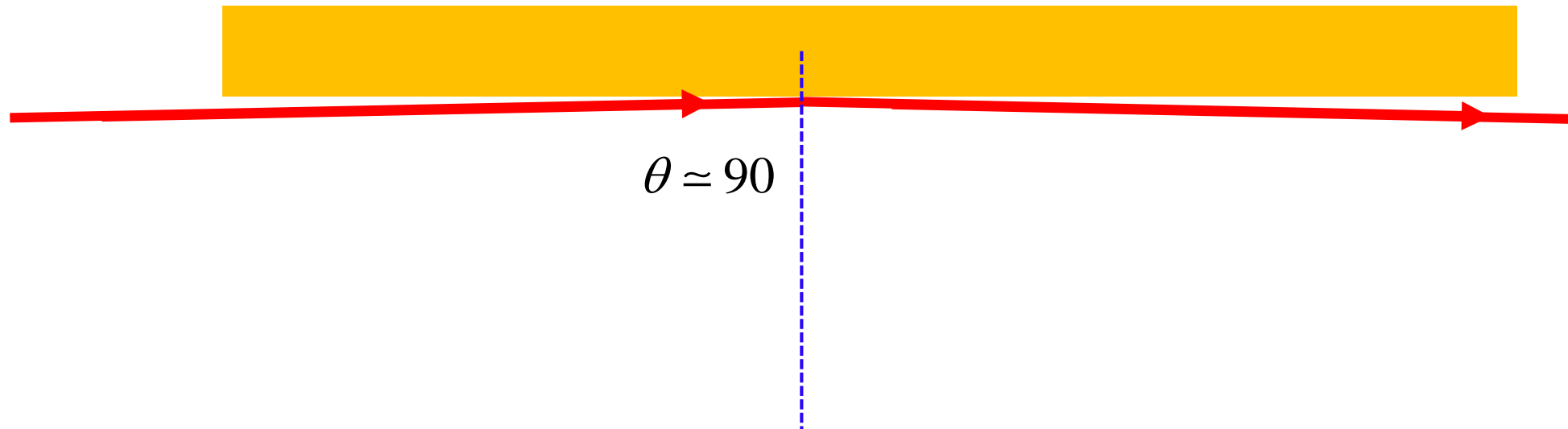
$$\theta = 90 \Rightarrow \cos(\theta) = 0 \ , \ \sin(\theta) = 1$$

$$R_s = R_p = 1$$

از این خاصیت برای موجبری دورن فیبرهای توخالی استفاده می شود. باریکه لیزر توسط یک عدسی با فاصله کانونی بزرگ (بیش از ۱۰۰ سانتی متر) در دهانه فیبر توخالی کانونی شده و در بازتاب از سطح شیشه درصد بسیار بالایی از آن بازتاب شده و در طول فیبر هدایت می شود.

$$\theta \simeq 90$$

پرتو نور تحت زاویه بروستر بر تیغه شفاف فرود آمده است پس نور بازتابیده دارای قطبش خالص S است و نور عبوری به طور جزئی قطبیده از نوع P است. با عبور متوالی از تیغه های موازی درصد بیشتری از قطبش S بازتاب شده و نور عبوری دارای قطبش P با خلوص بیشتر می شود.
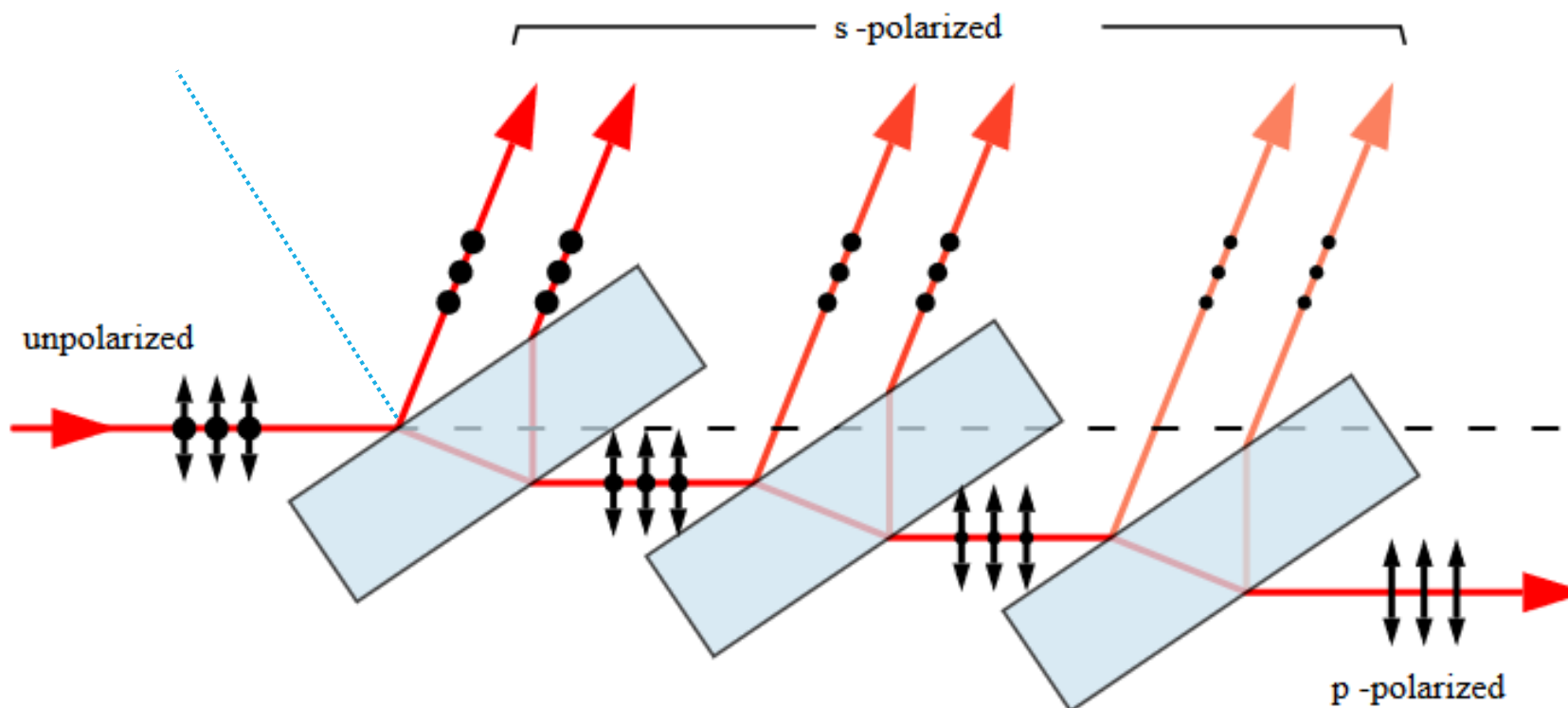
At normal incident (incident angle=0): *R* = 0.043996=4.4%

Reflectance (at 0.4 µm) **At Brewster's angle** [i]

R_S = 0.16146 (S-polarized)

R_P = 1.8892e-12 (P-polarized)

R = 0.080731 (non-polarized, (R_S+R_P)/2)

Reflection phase [i]

ϕ_S = -180.000°

ϕ_P = -179.920°

Brewster's angle [i]

θ_B = 56.846°

BK7 glass

در طول موج ۴۰۰ نانومتر (آبی) حدود ۸% نور ناقطبیده تابیده شده تحت زاویه بروستر
به این شیشه از سطح آن بازتاب می شود که این نور قطبیده کامل از نوع S است.

At normal incident (incident angle=0): $R = 0.088278 = 8.8\%$

Reflectance (at 0.4 μm)

At Brewster's angle [i]

$R_S = 0.29806$ (S-polarized)

$R_P = 1.2370e\text{-}8$ (P-polarized)

$R = 0.14903$ (non-polarized, $(R_S+R_P)/2$)

Reflection phase [i]

$\phi_S = -180.000°$

$\phi_P = -179.936°$

SF11 glass

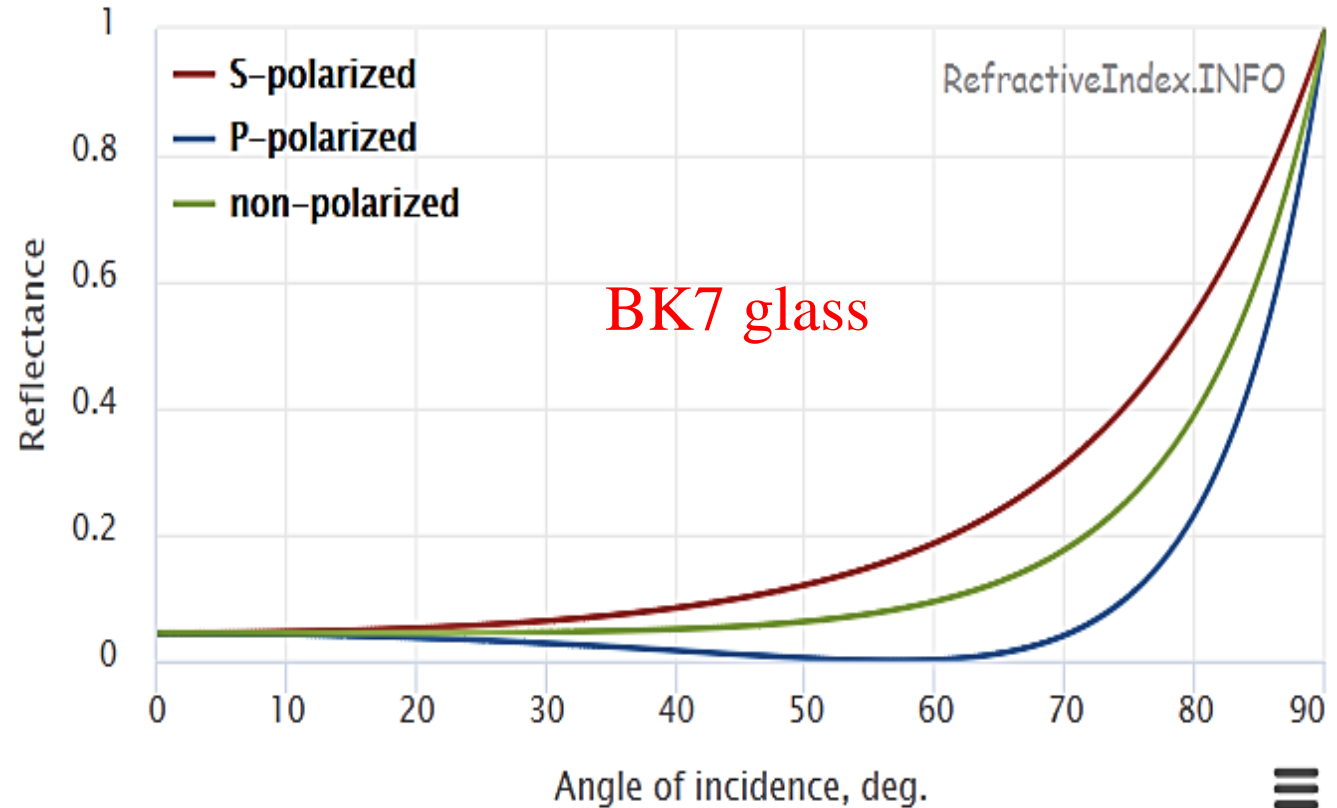**Brewster's angle** [i]
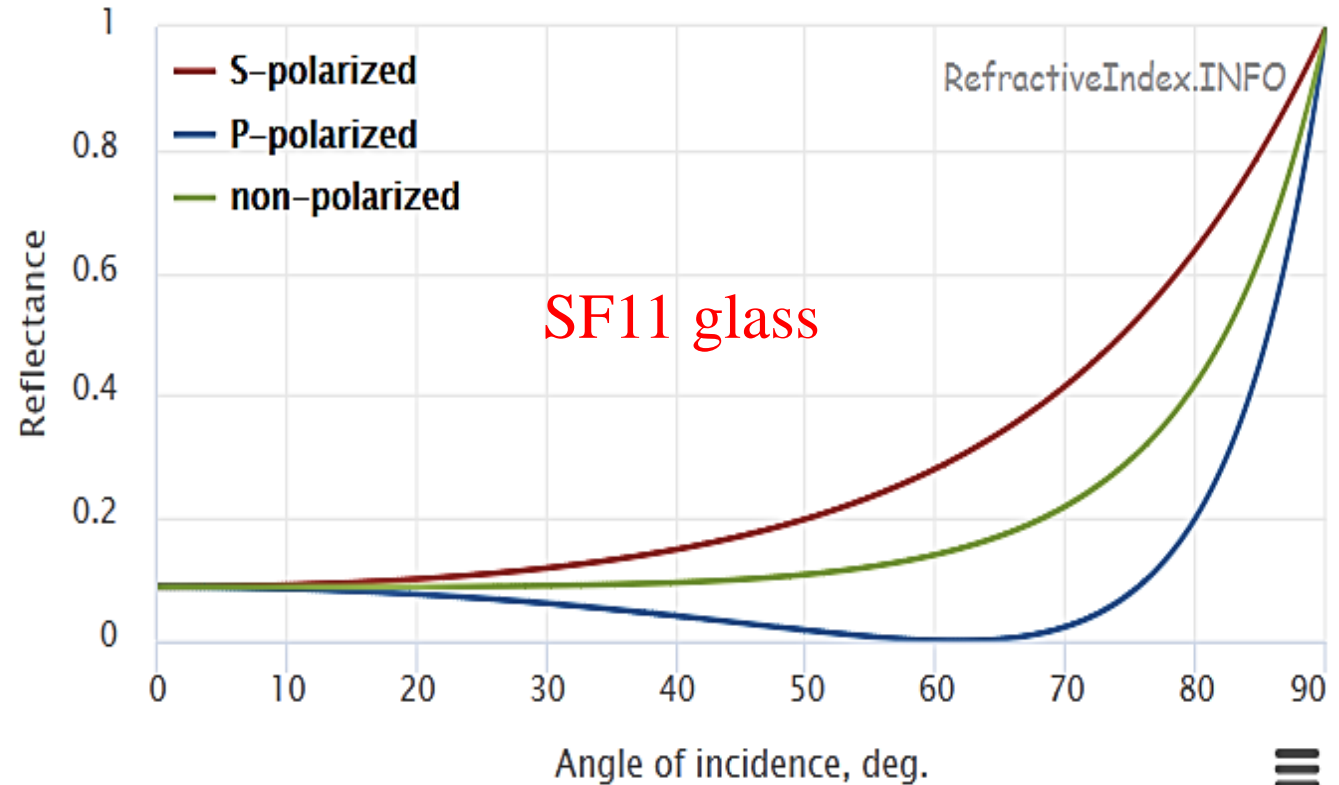
در طول موج ۴۰۰ نانومتر (آبی) حدود ۱۵٪ نور ناقطبیده تابیده شده تحت زاویه بروستر

به این شیشه از سطح آن بازتاب می شود که این نور قطبیده کامل از نوع S است.

$\theta_B = 61.548°$

ضریب شکست یک شیشه برای طول موج ۵۳۲ نانومتر (هارمونیک دوم لیزر نئودیمیم-یگ) ۱.۶۳ است. زاویه بروستر برای این شیشه را وقتی در هوا قرار دارد را حساب کنید.

$$\tan(\theta_B) = \frac{1.63}{1} = 1.63 \Rightarrow \theta_B = \tan^{-1}(1.63) = 58.5\,^\circ$$

استفاده از این پدیده برای قطبیده کردن خروجی لیزرها نقش اساسی دارد. در لیزرهای گازی که دارای تیوب است پنجره ها در دو انتها طوری نصب می شوند که پرتو لیزر تحت زاویه بروستر بر آنها بتابد. آنگاه پرتو عبوری از پنجره به طور جزئی قطبیده است. این پرتو در بازگشت از آینه ها و درون آینه تقویت می گردد. قطبش غالب بیشتر تقویت شده و در چند رفت و برگشت درون رزوناتور درصد قطبش غالب به تدریج افزایش می یابد طوری که خروجی لیزر می تواند بیش از ۹۹% قطبیده باشد. در لیزرهای حالت جامد معمولا خود کریستال با زاویه بورستر برش می خورد. در بعضی موارد کریستال درون یک چمبر خلا قرار می گیرد که پنجره های دو انتهای آن با زاویه بروستر نصب شده اند.

$\mathbf{E}_1 = \mathbf{E}_{01} \cos (\mathbf{k}_1 \cdot \mathbf{r} - \omega t + \epsilon_1)$ Two waves with the same frequency traveling in

$\mathbf{E}_2 = \mathbf{E}_{02} \cos (\mathbf{k}_2 \cdot \mathbf{r} - \omega t + \epsilon_2)$ different direction when coming together in a point

At some general point P, defined by *position vector* $\mathbf{r}$, the waves intersect to produce a disturbance whose electric field $\mathbf{E}_p$ is given by the principle of superposition,

$$\mathbf{E}_p = \mathbf{E}_1 + \mathbf{E}_2$$

The irradiance measures the time average of the square of the wave amplitude.

$$I = \epsilon_0 c \langle \mathbf{E}^2 \rangle$$

Thus the resulting irradiance at P is given by

$$I = \epsilon_0 c \langle \mathbf{E}_p^2 \rangle = \epsilon_0 c \langle \mathbf{E}_p \cdot \mathbf{E}_p \rangle = \epsilon_0 c \langle (\mathbf{E}_1 + \mathbf{E}_2) \cdot (\mathbf{E}_1 + \mathbf{E}_2) \rangle$$

or

$$I = \epsilon_0 c \langle \mathbf{E}_1^2 + \mathbf{E}_2^2 + 2\mathbf{E}_1 \cdot \mathbf{E}_2 \rangle$$

$$I = \epsilon_0 c \langle \mathbf{E}_1^2 + \mathbf{E}_2^2 + 2\mathbf{E}_1 \cdot \mathbf{E}_2 \rangle = \varepsilon_0 c \langle E_1^{\,2} \rangle + \varepsilon_0 c \langle E_2^{\,2} \rangle + 2\varepsilon_0 c \langle E_1 . E_2 \rangle = I_1 + I_2 + I_{12}$$

the first two terms correspond to the irradiances of the individual waves, I_1 and I_2. The last term depends on an interaction of the waves and is called the interference term, I_{12}

The presence of the third term I_{12} is indicative of the wave nature of light, which can produce enhancement or diminution of the irradiance through interference.

Consider the interference term,

$$I_{12} = 2\epsilon_0 c \langle \mathbf{E}_1 \cdot \mathbf{E}_2 \rangle$$

where $\mathbf{E}_1$ and $\mathbf{E}_2$ are given by Eqs. (10-1) and (10-2). Their dot product,

$$\mathbf{E}_1 \cdot \mathbf{E}_2 = \mathbf{E}_{01} \cdot \mathbf{E}_{02} \cos(\mathbf{k}_1 \cdot \mathbf{r} - \omega t + \epsilon_1) \cos(\mathbf{k}_2 \cdot \mathbf{r} - \omega t + \epsilon_2)$$

can be simplified by first expanding the cosine factors, interpreted as the difference of two angles. To this end, let us define

$$\alpha \equiv \mathbf{k}_1 \cdot \mathbf{r} + \epsilon_1 \quad \text{and} \quad \beta \equiv \mathbf{k}_2 \cdot \mathbf{r} + \epsilon_2$$

so that

$$\mathbf{E}_1 \cdot \mathbf{E}_2 = \mathbf{E}_{01} \cdot \mathbf{E}_{02} \cos(\alpha - \omega t) \cos(\beta - \omega t)$$

Expanding and multiplying the cosine factors, we arrive at

$$\langle \mathbf{E}_1 \cdot \mathbf{E}_2 \rangle = \mathbf{E}_{01} \cdot \mathbf{E}_{02} [\cos \alpha \cos \beta \langle \cos^2 \omega t \rangle + \sin \alpha \sin \beta \langle \sin^2 \omega t \rangle$$

$$+ (\cos \alpha \sin \beta + \sin \alpha \cos \beta) \langle \sin \omega t \cos \omega t \rangle]$$

where time averages are indicated for each time-dependent factor. Over any number of complete cycles, one can easily show that

$$\langle \cos^2 \omega t \rangle = \tfrac{1}{2}, \qquad \langle \sin^2 \omega t \rangle = \tfrac{1}{2}$$

and

$$\langle \sin \omega t \cos \omega t \rangle = 0$$

Thus

$$\langle \mathbf{E}_1 \cdot \mathbf{E}_2 \rangle = \tfrac{1}{2} \mathbf{E}_{01} \cdot \mathbf{E}_{02} \cos(\alpha - \beta)$$

$$\langle \mathbf{E}_1 \cdot \mathbf{E}_2 \rangle = \tfrac{1}{2} \mathbf{E}_{01} \cdot \mathbf{E}_{02} \cos[(\mathbf{k}_1 - \mathbf{k}_2) \cdot \mathbf{r} + (\epsilon_1 - \epsilon_2)]$$

$$\delta = (\mathbf{k}_1 - \mathbf{k}_2) \cdot \mathbf{r} + (\epsilon_1 - \epsilon_2)$$

$$\boxed{I_{12} = \epsilon_0 c \, \mathbf{E}_{01} \cdot \mathbf{E}_{02} \cos \delta}$$

Similarly, the irradiance terms I_1 and I_2

$$I_1 = \epsilon_0 c \langle E_1^2 \rangle = \tfrac{1}{2} \epsilon_0 c E_{01}^2 \Rightarrow E_{01} = \sqrt{\frac{2I_1}{\varepsilon_0 c}}$$

$$I_2 = \epsilon_0 c \langle E_2^2 \rangle = \tfrac{1}{2} \epsilon_0 c E_{02}^2 \Rightarrow E_{02} = \sqrt{\frac{2I_2}{\varepsilon_0 c}}$$

In the case $\mathbf{E}_{01} \parallel \mathbf{E}_{02}$

$$\boxed{I_{12} = \epsilon_0 c\, \mathbf{E}_{01} \cdot \mathbf{E}_{02} \cos \delta} \quad = \varepsilon_0 c \sqrt{\frac{2I_1}{\varepsilon_0 c}} \sqrt{\frac{2I_2}{\varepsilon_0 c}} \cos \delta = 2\sqrt{I_1 I_2} \cos \delta$$

$$I = I_1 + I_2 + 2\sqrt{I_1 I_2} \cos \delta$$

To be more specific, when $\cos \delta = +1$, constructive interference yields the maximum irradiance
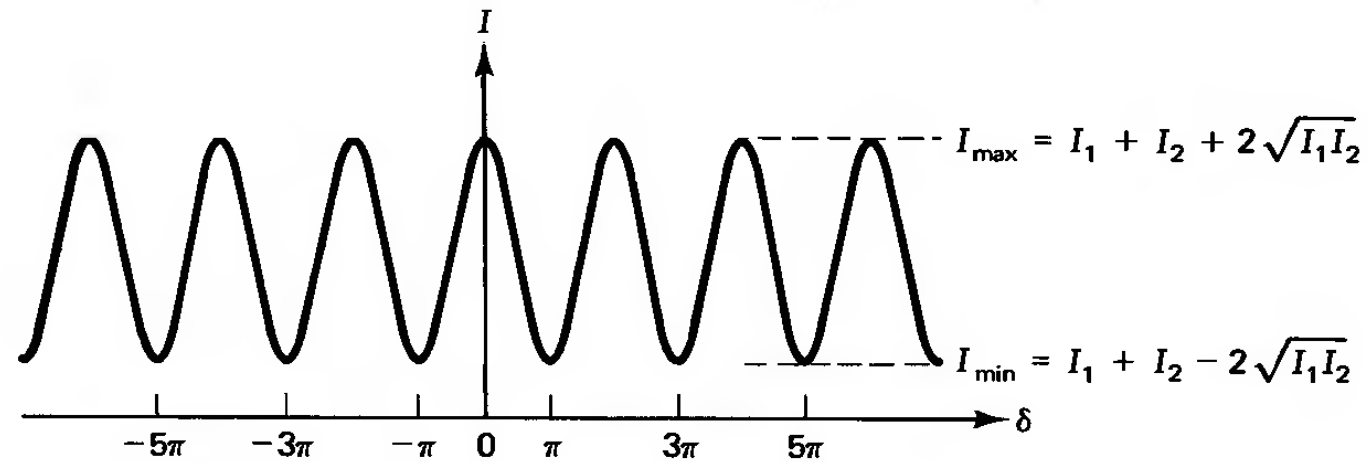
$$I_{\max} = I_1 + I_2 + 2\sqrt{I_1 I_2}$$

On the other hand, when $\cos \delta = -1$, destructive interference yields the minimum, or background, irradiance
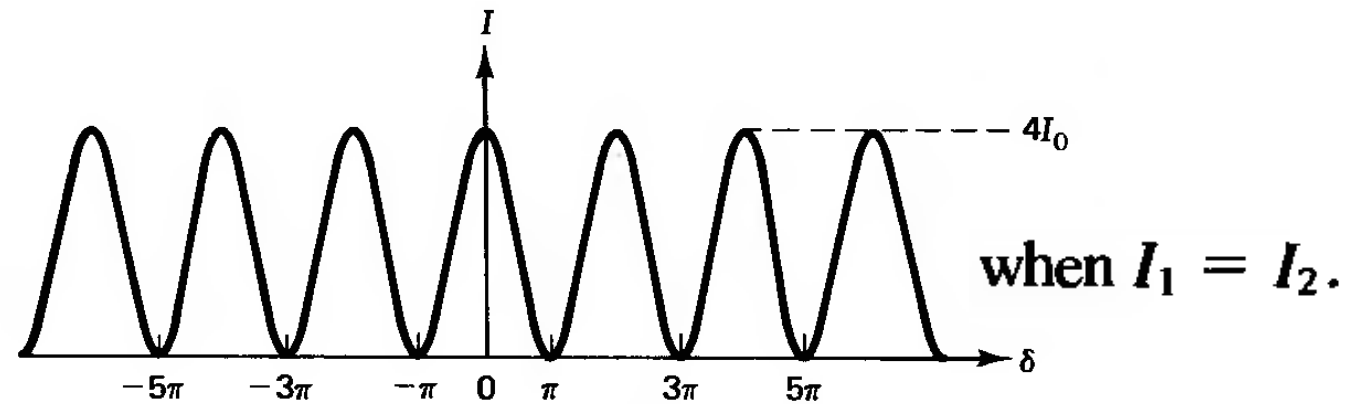
$$I_{\min} = I_1 + I_2 - 2\sqrt{I_1 I_2}$$

cancellation is complete, when $I_1 = I_2 = I_0$

$$I_{max} = 4I_0 \quad \text{and} \quad I_{min} = 0$$

(a)

when $I_1 = I_2$.

(b)

fringe contrast, also called *visibility*,

$$\text{fringe contrast} = \frac{I_{max} - I_{min}}{I_{max} + I_{min}}$$

when $I_1 = I_2 = I_0$

$$I = I_0 + I_0 + 2\sqrt{I_0^2} \cos \delta = 2I_0(1 + \cos \delta)$$

and then making use of the trigonometric identity

$$1 + \cos \delta \equiv 2 \cos^2 \left(\frac{\delta}{2}\right)$$

The irradiance for two equal interfering beams is then

$$I = 4I_0 \cos^2 \left(\frac{\delta}{2}\right)$$

Notice that energy is not conserved at each point of the superposition, that is, $I \neq 2I_0$, but that over at least one spatial period of the fringe pattern $I_{av} = 2I_0$. This situation is typical of interference and diffraction phenomena: If the power density falls below the average at some points, it rises above the average at other points in such a way that the total pattern satisfies the principle of energy conservation.

YOUNG'S DOUBLE-SLIT EXPERIMENT
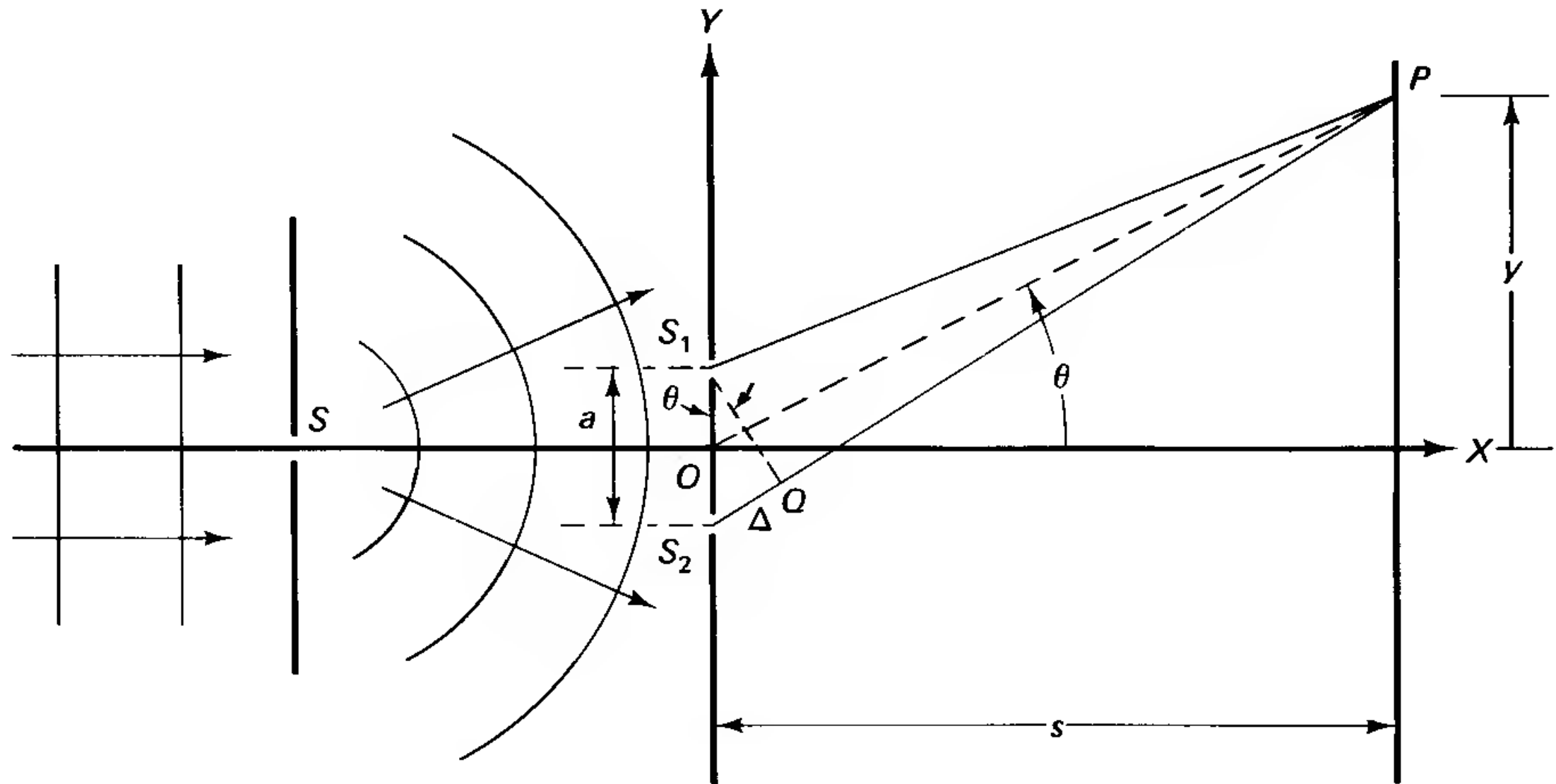
The condition for constructive interference at a point P on the screen is then, to a very good approximation,

$$S_2P - S_1P = \Delta = m\lambda \cong a \sin \theta$$

whereas for destructive interference,

$$\Delta = (m + \tfrac{1}{2})\lambda = a \sin \theta$$

$$\delta = \left(\frac{2\pi}{\lambda}\right)\Delta$$

The result is

$$I = 4I_0 \cos^2\left(\frac{\pi\Delta}{\lambda}\right) = 4I_0 \cos^2\left(\frac{\pi a \sin \theta}{\lambda}\right)$$

For points P near the optical axis, where $y \ll s$, we may approximate further: $\sin \theta \cong \tan \theta \cong y/s$, so that

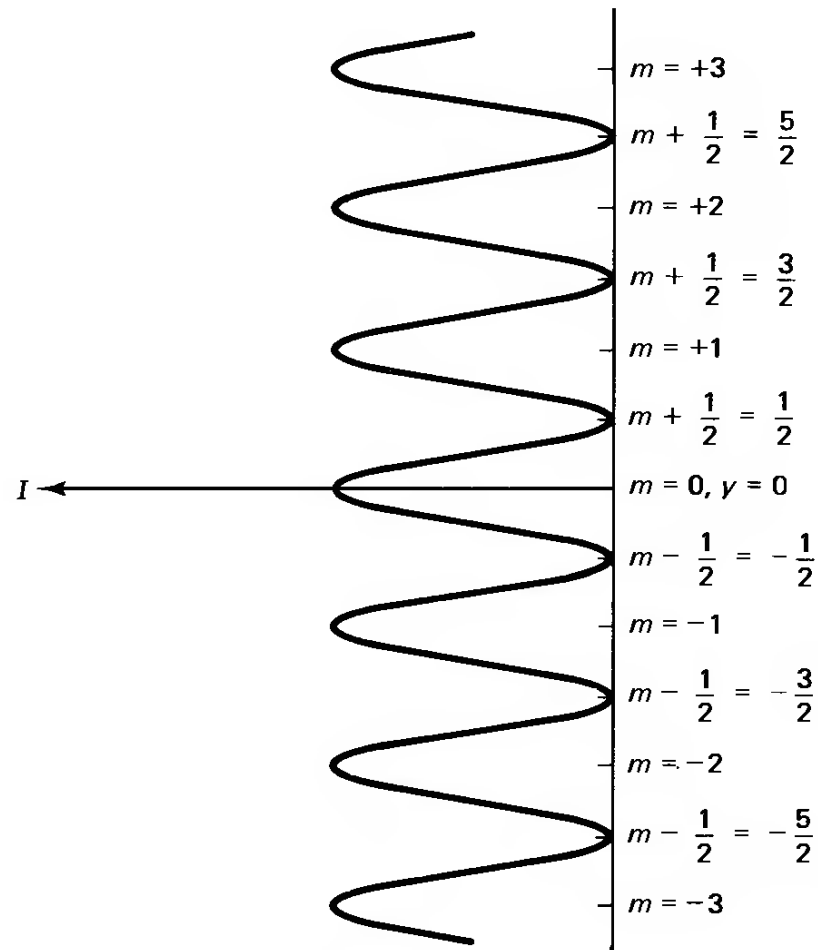$$\boxed{I = 4I_0 \cos^2\left(\frac{\pi a y}{\lambda s}\right)}$$

bright fringe positions $\qquad$ $y_m = \dfrac{m\lambda s}{a}$, $\qquad m = 0, 1, 2, \ldots$

a constant separation between irradiance maxima,

$$\Delta y = \dfrac{\lambda s}{a}$$

I ←

$m = +3$

$m + \dfrac{1}{2} = \dfrac{5}{2}$

$m = +2$

$m + \dfrac{1}{2} = \dfrac{3}{2}$

$m = +1$

$m + \dfrac{1}{2} = \dfrac{1}{2}$

$m = 0, y = 0$

$m - \dfrac{1}{2} = -\dfrac{1}{2}$

$m = -1$

$m - \dfrac{1}{2} = -\dfrac{3}{2}$

$m = -2$

$m - \dfrac{1}{2} = -\dfrac{5}{2}$

$m = -3$

مثال:

در آزمایش یانگ دو شکاف فاصله دو روزنه از یکدیگر ۱ میلی متر و فاصله تا پرده ۵ متر است. اگر چشمه لیزر هلیون – نئون با طول موج ۶۳۳ نانومتر باشد فاصله دو بیشینه مجاور را حساب کنید

$$\Delta y = \frac{\lambda s}{a}$$

$$\Delta y = \frac{0.633 \times 5000}{1} = 3.165 \quad \text{mm}$$

مکان کمینه ها $\qquad (n = 0, 1, 2, 3, ...) \qquad y_n = (2n-1)\frac{\lambda s}{2a}$

فاصله بیشینه m تا n یا فاصله کمینه m تا n $\qquad y_m - y_n = (m-n)\frac{\lambda s}{a}$

فاصله بیشینه m تا کمینه n $\qquad y_m - y_n = (2m - (2n+1))\frac{\lambda s}{2a}$
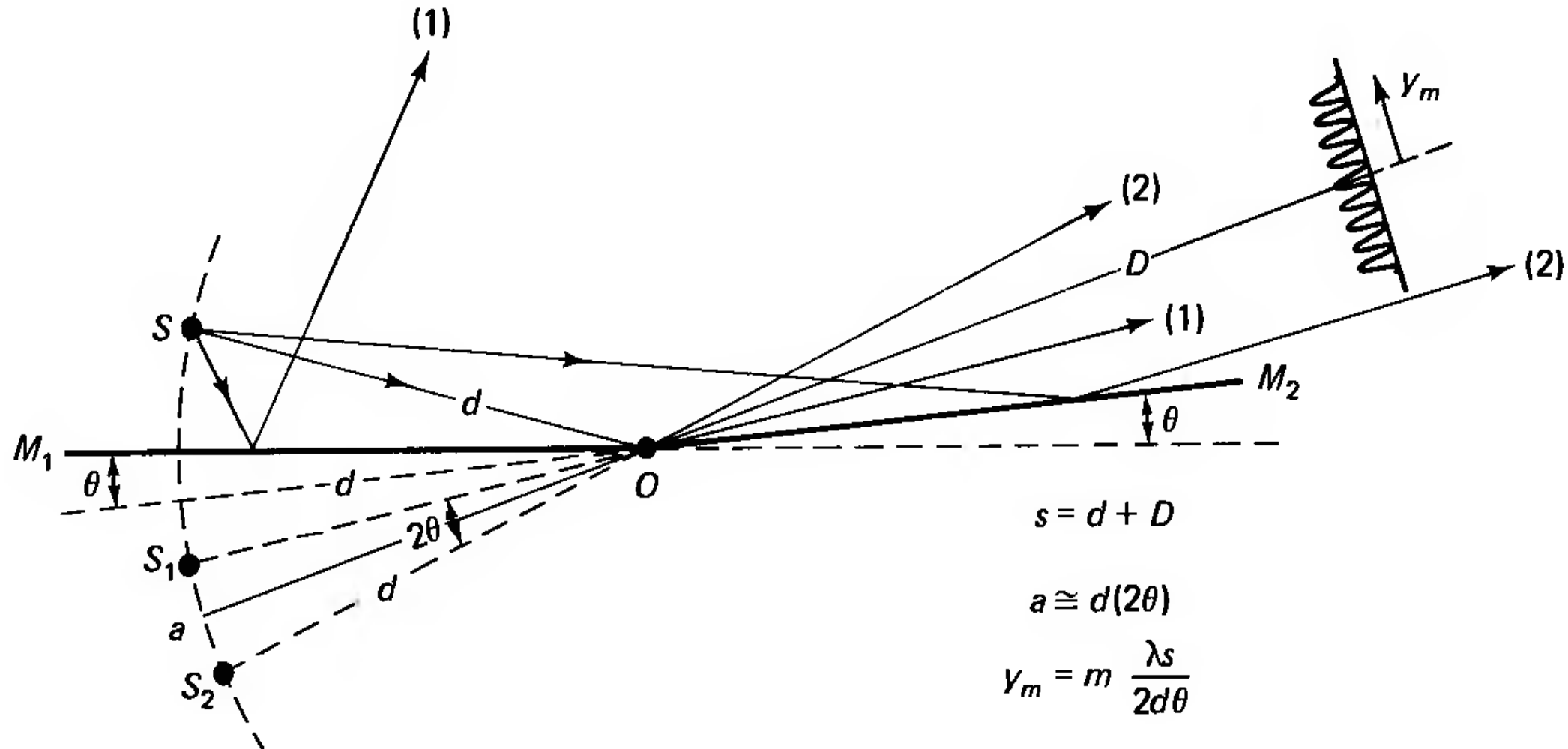
Interference with Lloyd's mirror.

$$y_m = \frac{m \lambda s}{a}$$
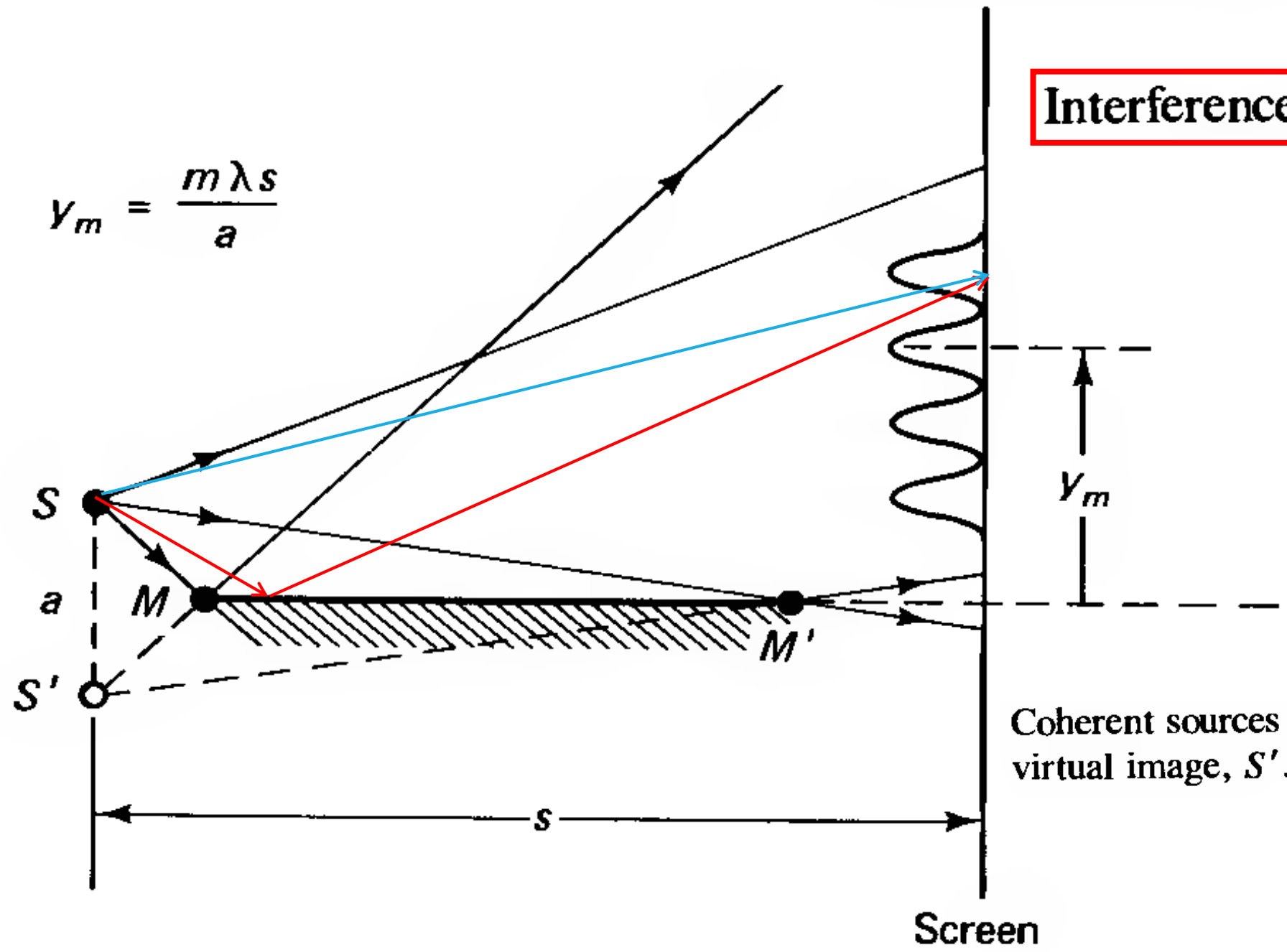
Coherent sources are the point source S and its virtual image, S'.
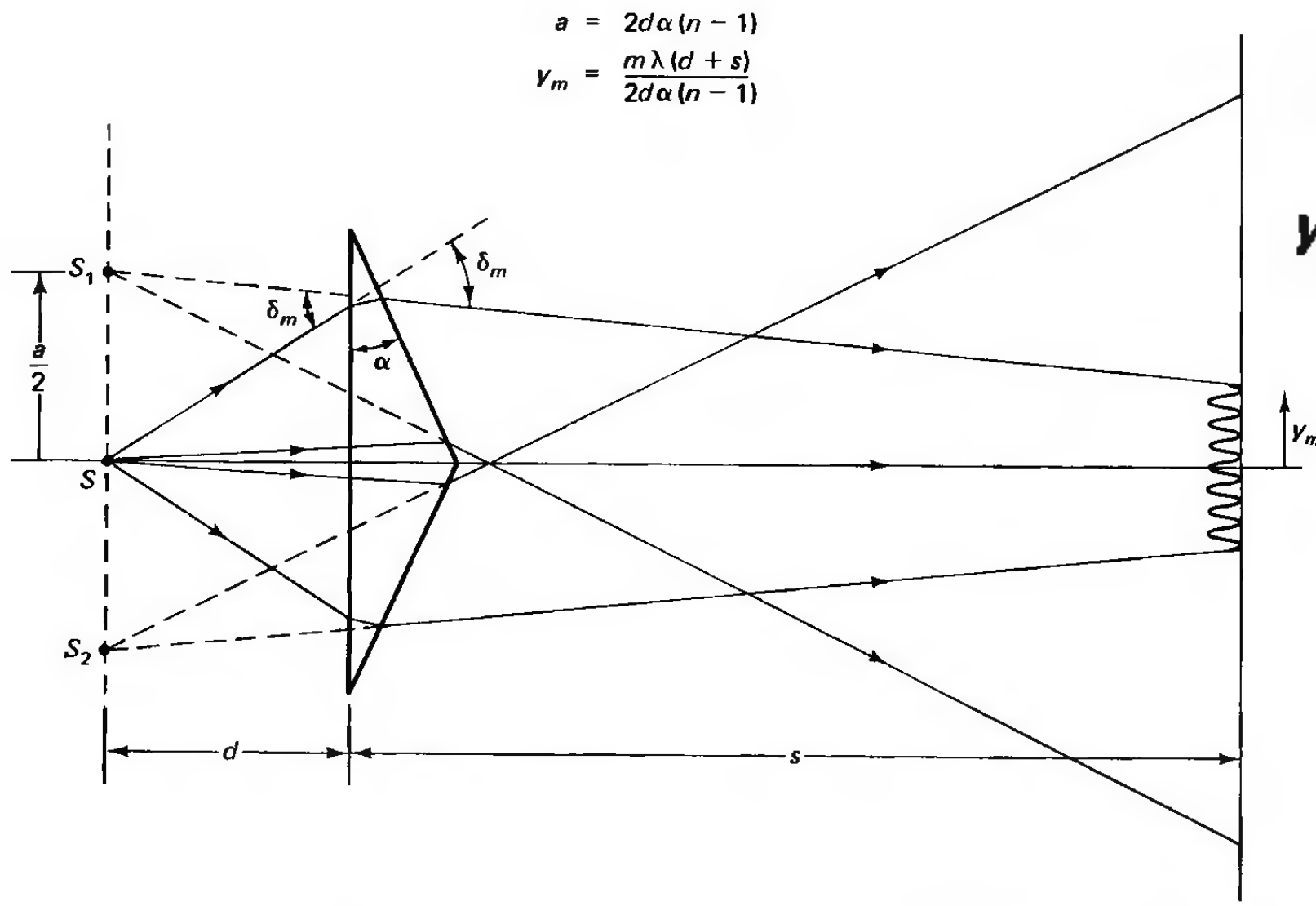
Screen

Interference with Fresnel's mirrors.

Coherent sources are the two virtual images of point source S, formed in the two plane mirrors M_1 and M_2. Direct light from S is not allowed to reach the screen.

$$s = d + D$$

$$a \cong d(2\theta)$$

$$Y_m = m\,\frac{\lambda s}{2d\theta}$$

Interference with Fresnel's biprism.

Coherent sources are the virtual images S_1 and S_2 of source S, formed by refraction in the two halves of the prism.

$$a = 2d\alpha(n-1)$$

$$y_m = \frac{m\lambda(d+s)}{2d\alpha(n-1)}$$
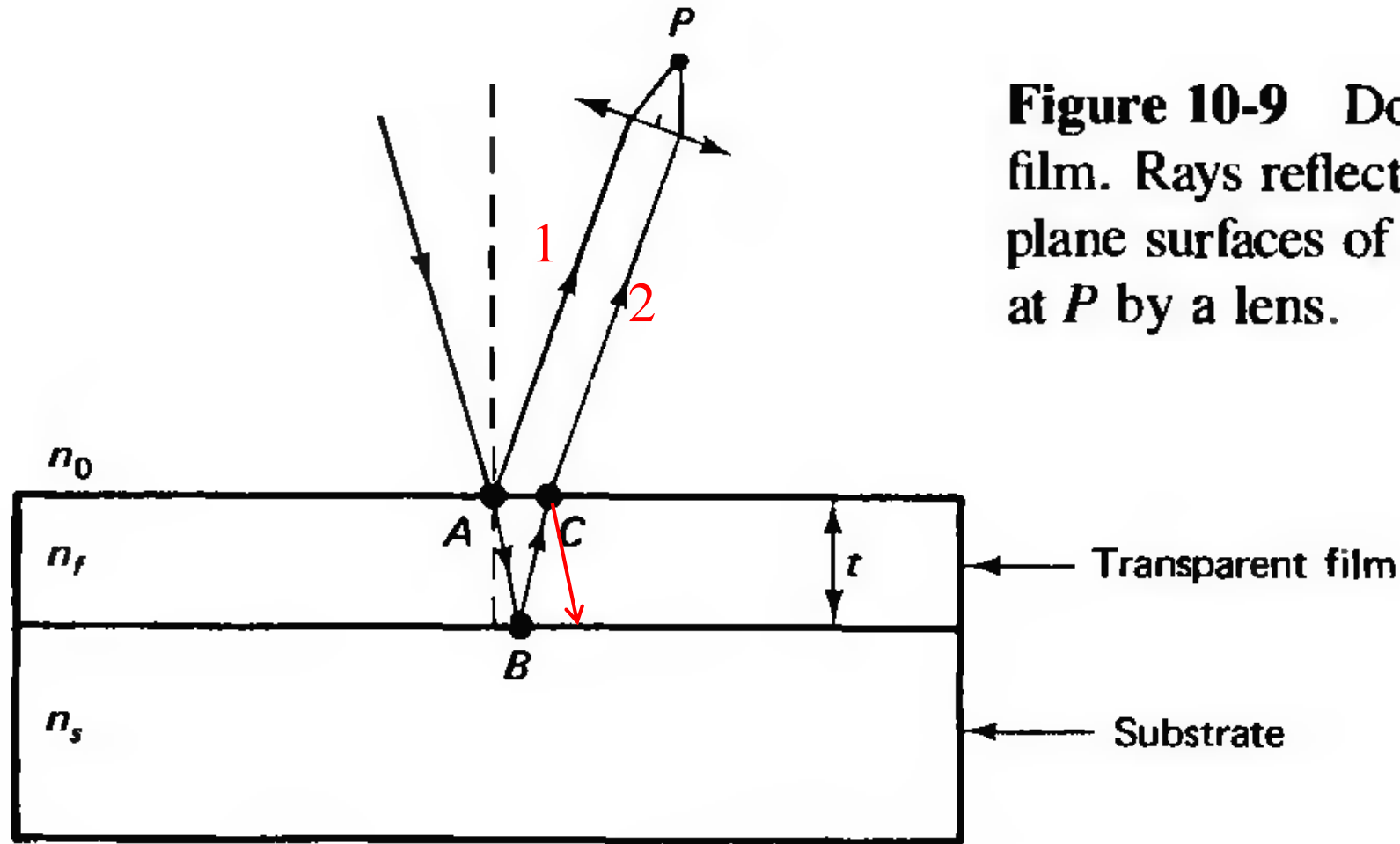
INTERFERENCE IN DIELECTRIC FILMS

Figure 10-9 Double-beam interference from a film. Rays reflected from the top and bottom plane surfaces of the film are brought together at P by a lens.

in the case of normal incidence.

$$\Delta = n(AB + BC) = n(2t)$$

in the case of normal incident

the *reflection coefficient* (or ratio of reflected to incident electric field amplitude is given by

$$r = \frac{1 - n}{1 + n}$$

where the *relative index* $n = n_2/n_1$. The amplitudes of the electric field reflected internally and externally from the film of Figure 10-9 are then equal, assuming a non-absorbing film, if the relative indices are equivalent for these cases, that is, if

$$\frac{n_f}{n_0} = \frac{n_s}{n_f} \quad \text{or} \quad n_f = \sqrt{n_0 n_s}$$

Assuming $n = 1.50$ for the glass lens, ideally $n_f = \sqrt{1.50} = 1.22$.

nearest practical film material with a matching index is MgF_2, with $n = 1.38$.

Returning now to the single-layer film, we want first to generalize the conditions for constructive and destructive interference by calculating the optical path difference in the case incident rays are not normal.

$$\Delta = n_f(AB + BC) - n_0(AD)$$
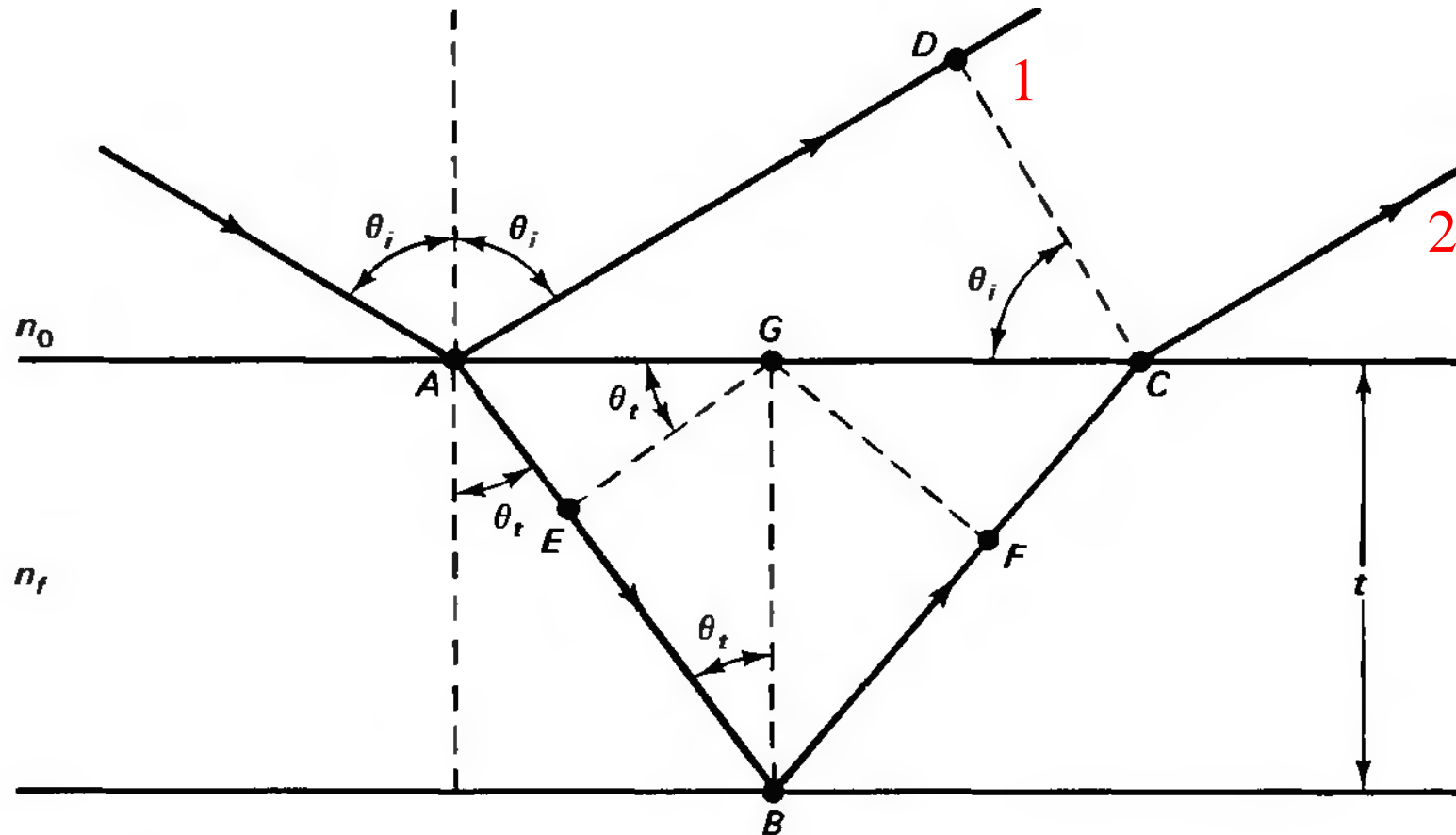
where n_f and n_0 are the refractive indices of film and external medium, as shown. It is helpful to break the distances AB and BC into parts, resulting in

$$\Delta = [n_f(AE + FC) - n_0 AD] + n_f(EB + BF) \tag{10-27}$$

The quantity in square brackets vanishes, as we now show. By Snell's law,

$$n_0 \sin \theta_i = n_f \sin \theta_t \tag{10-28}$$

In addition, by inspection,

$$AE = AG \sin \theta_t = \left(\frac{AC}{2}\right) \sin \theta_t \tag{10-29}$$

and

$$AD = AC \sin \theta_i \tag{10-30}$$

From Eq. (10-29) and incorporating, in turn, Eqs. (10-30) and (10-28),

$$2AE = AC \sin \theta_t = AD \left(\frac{\sin \theta_t}{\sin \theta_i}\right) = AD \left(\frac{n_0}{n_f}\right)$$

so that

$$n_0 AD = 2n_f AE = n_f(AE + FC) \tag{10-31}$$

which was to be proved. There remains then, from Eq. (10-27),

$$\Delta = n_f(EB + BF) = 2n_f EB \tag{10-32}$$

The length EB is related to the film thickness t by $EB = t \cos \theta_t$, so we have, finally,

$$\Delta = 2n_f t \cos \theta_t \tag{10-33}$$

The corresponding phase difference is $\delta = k\Delta = (2\pi/\lambda_0)\,\Delta$. The net phase difference must also take into account possible phase differences that arise on reflection, as discussed previously. Nevertheless, if we call Δ_p the optical path difference given by Eq. (10-33) and Δ_r the equivalent path difference arising from phase change on reflection, we can state quite generally the conditions for

$$\text{constructive interference:} \quad \Delta_p + \Delta_r = m\lambda$$

and

$$\text{destructive interference:} \quad \Delta_p + \Delta_r = (m + \tfrac{1}{2})\lambda$$

where $m = 0, 1, 2, \ldots$.
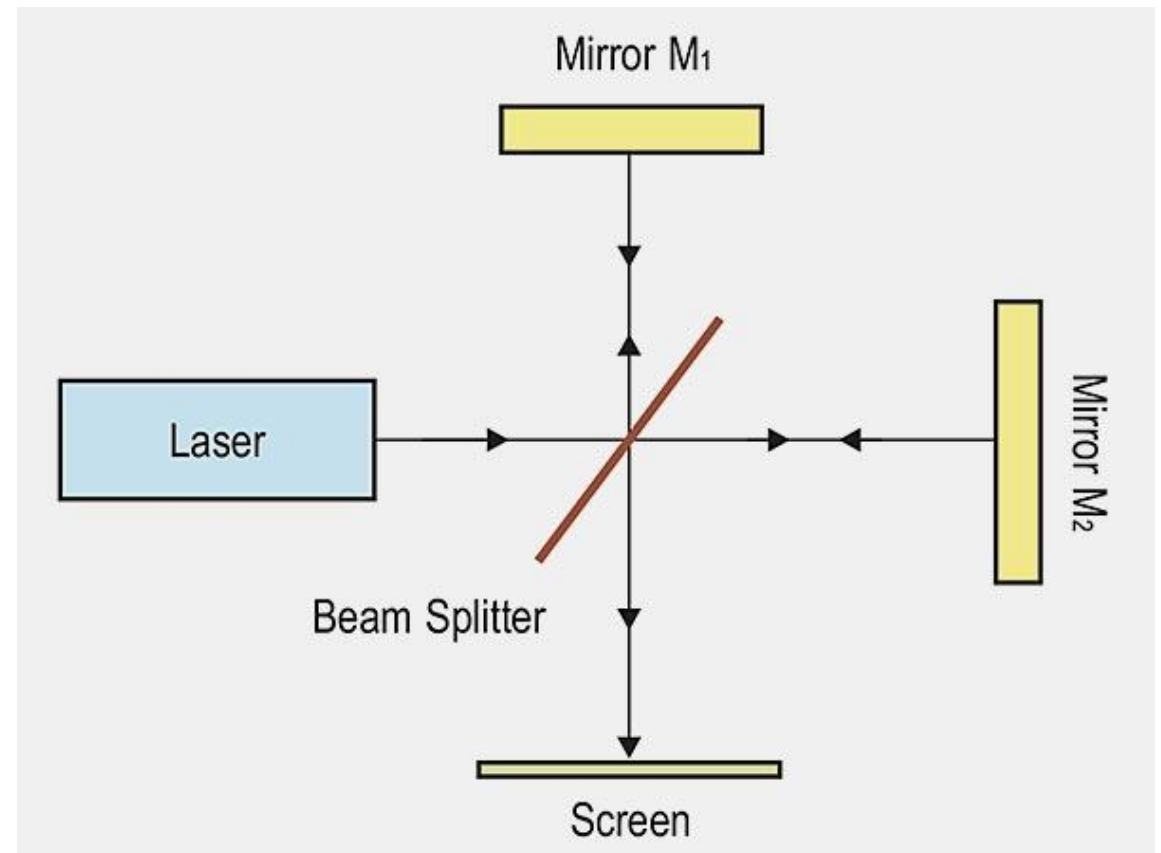
Optical Interferometry

An instrument designed to exploit the interference of light and the fringe patterns that result from optical path differences, in any of a variety of ways, is called an optical interferometer.
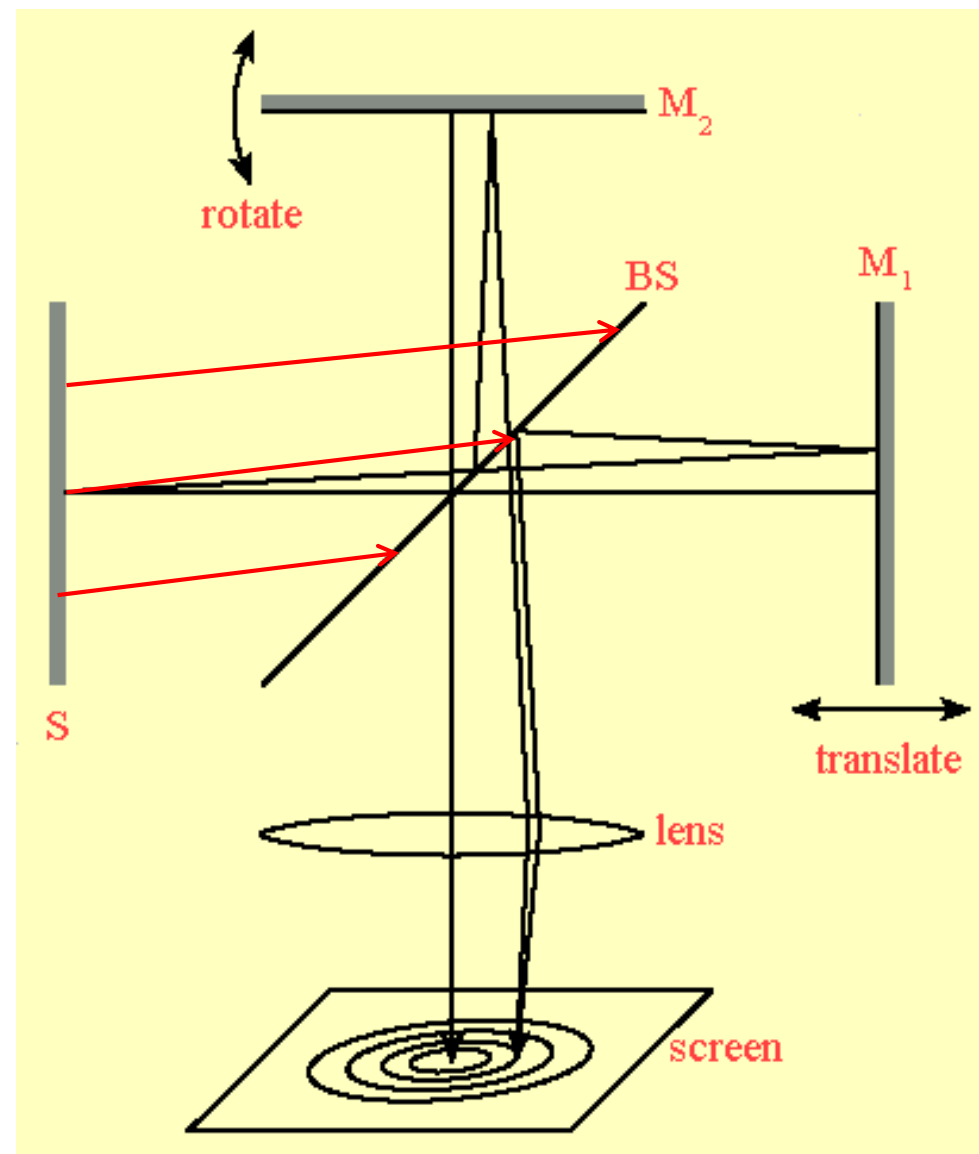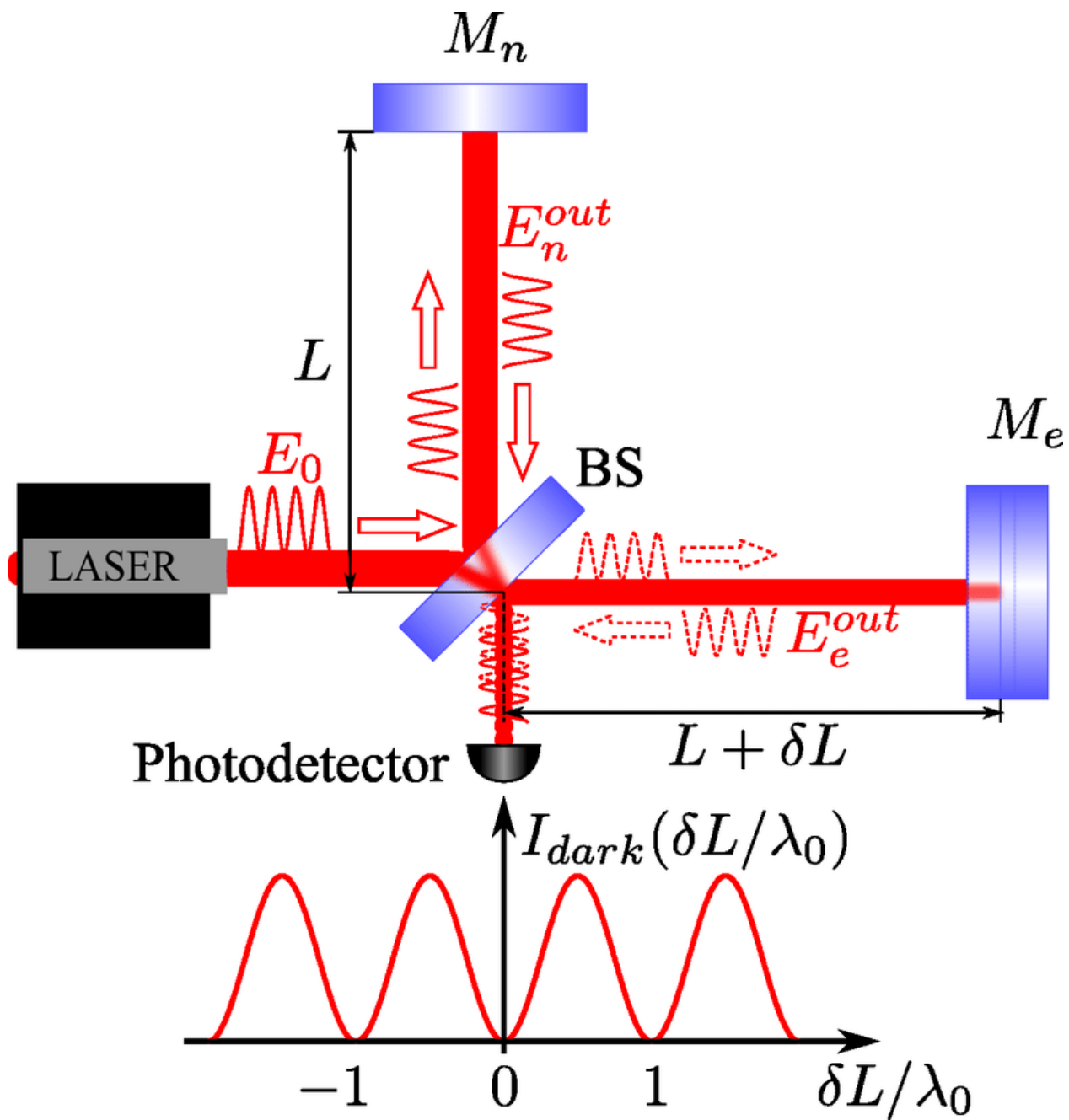
THE MICHELSON INTERFEROMETER

the optical path difference between the two beams emerging from the interferometer is

$$\Delta_p = 2d \cos \theta$$

where the angle θ measures the inclination of the beams relative to the optical axis.

M_n

E_n^{out}

L

E_0

BS

M_e

LASER

E_e^{out}

Photodetector

$L + \delta L$

$I_{dark}(\delta L/\lambda_0)$

$-1 \quad 0 \quad 1 \qquad \delta L/\lambda_0$

M_2

rotate

BS

M_1

S

translate

lens

screen

Assuming that the two interfering beams are of equal amplitude, the irradiance of the fringe system of circles concentric with the optical axis is given by

$$I = 4I_0 \cos^2\left(\frac{\delta}{2}\right)$$

where the phase difference is

$$\delta = k\Delta = \left(\frac{2\pi}{\lambda}\right)\Delta$$

The net optical path difference is $\Delta = \Delta_p + \Delta_r$, as usual. A relative π phase shift between the two beams occurs because beam 2 experiences two external reflections but beam 3 experiences only one.[1] For dark fringes, then,

$$\Delta_p + \Delta_r = 2d \cos\theta + \frac{\lambda}{2} = \left(m + \frac{1}{2}\right)\lambda$$

or, more simply,

$$2d \cos\theta = m\lambda, \qquad m = 0, 1, 2, \ldots \qquad \text{dark fringes}$$

If **d** is of such magnitude that the normal rays forming the center of the fringe system that is, the center fringe is dark, then its order, given by

$$m_{\text{max}} = \frac{2d}{\lambda}$$

is a larger integer. Neighboring dark fringes decrease in order outwards from the center of the pattern, as $\cos(\theta)$ decreases from its maximum value of 1.

an increase in the angular separation $\Delta\theta$ of a given small fringe interval Δm as the mirror spacing d becomes smaller, since
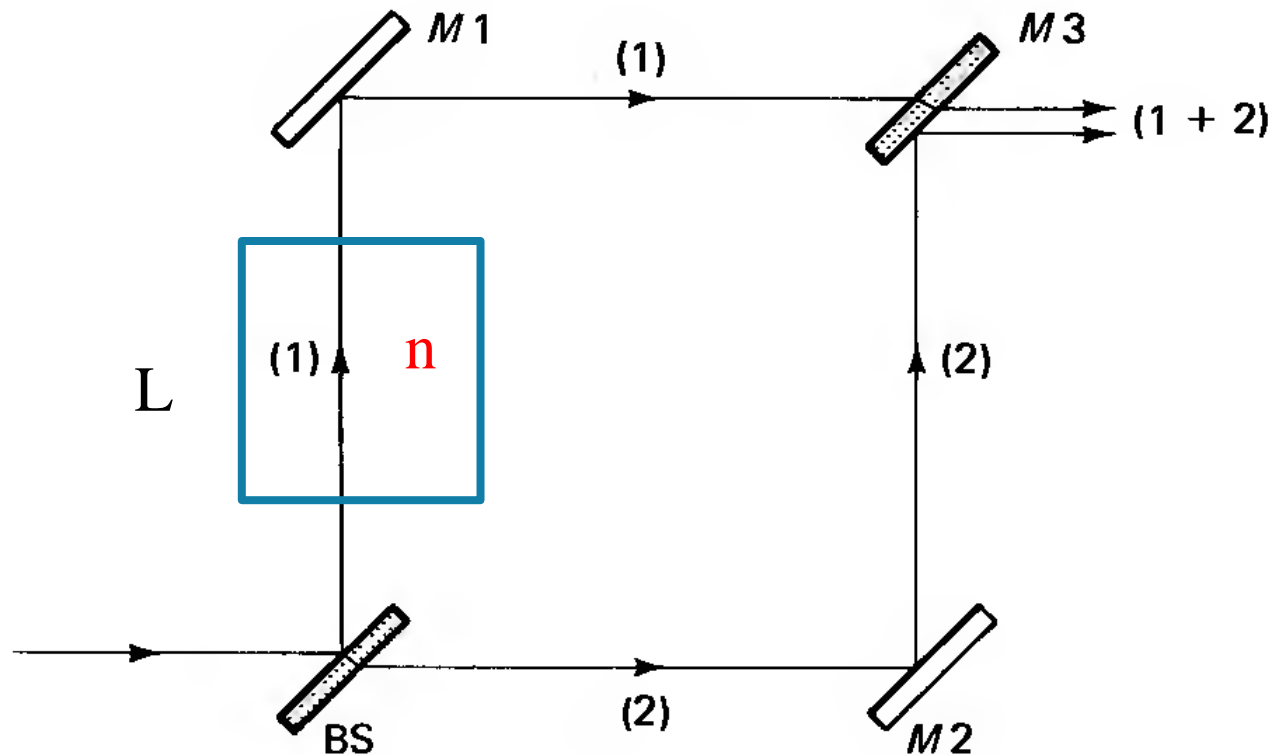
$$|\Delta\theta| = \frac{\lambda\,\Delta m}{2d\,\sin\,\theta}$$

Equation below suggests an experimental way of either measuring λ when Δd is known or calibrating the micrometer translation screw when λ is known.

$$\Delta m = \frac{2\,\Delta d}{\lambda}$$

Mach-Zehnder interferometer.

The incident beam of roughly parallel light is divided into two beams at beam splitter BS. Each beam is again totally reflected by mirrors $M1$ and $M2$, and the beams are made coincident again by the semitransparent mirror $M3$. Path lengths of beams 1 and 2 around the rectangular system and through the glass of the beam splitters are identical.

$$\Delta = nL - L = (n-1)L$$

$$\delta = k\Delta = \frac{2\pi}{\lambda}(n-1)L = m\lambda$$

$$\frac{2\pi}{\lambda}L(\Delta n) = \lambda(\Delta m)$$

$$\Delta n = \frac{\lambda^2}{2\pi L}\Delta m$$

$$n(p) = \frac{\lambda^2}{2\pi L}\Delta m_{max} + 1$$

Coherence

The term coherence is used to describe the correlation between phases of monochromatic radiations. Beams with random phase relationships are, generally speaking, incoherent beams, whereas beams with a constant phase relationship are coherent beams.

FOURIER ANALYSIS

When a number of harmonic waves of the same frequency are added together, even though they differ in amplitude and phase, the result is again a harmonic wave of the given frequency, as shown in Chapter 9. If the superposed waves differ in frequency as well, the result is periodic but anharmonic and may assume an arbitrary shape, such as that shown in Figure 12-1. An infinite variety of shapes may be synthesized in this way. The inverse process of decomposition of a given waveform into its harmonic components is called *Fourier analysis*.
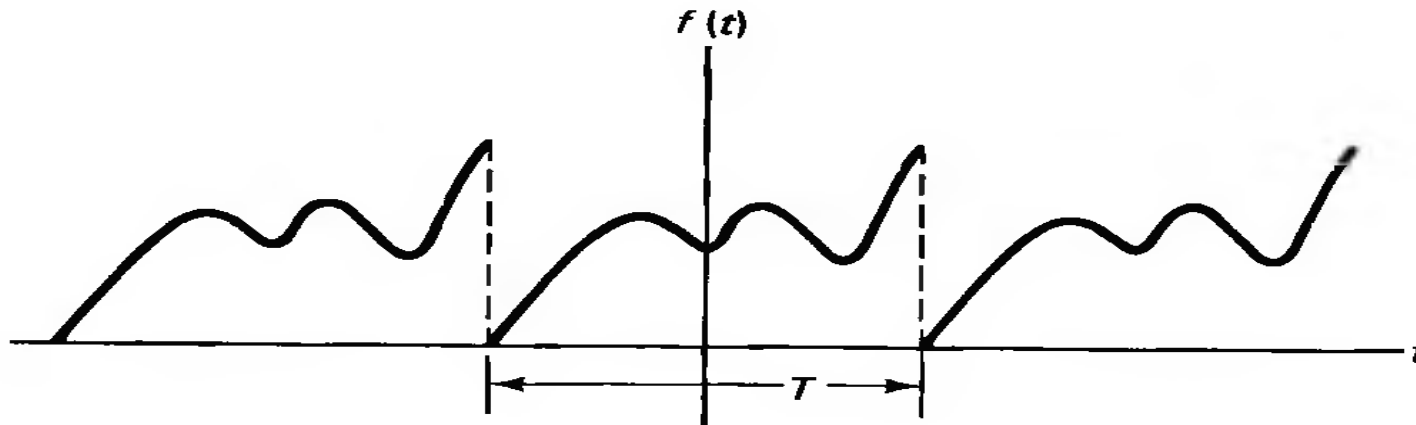
If $f(t)$ is a bounded function of period T then the *Fourier series*,

$$f(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{m=1}^{\infty} a_m \cos m\omega t + \sum_{m=1}^{\infty} b_m \sin m\omega t \qquad \text{(12-1)}$$

تابع متناهي دوره اي:

In Eq. (12-1), m takes on integral values and $\omega = 2\pi f = 2\pi/T$, where T is the period of the arbitrary $f(t)$. The sine and cosine terms can be interpreted as harmonic waves with amplitudes of b_m and a_m, respectively, and frequencies of $m\omega$. The magnitudes of the coefficients or amplitudes determine the contribution each harmonic wave makes to the resultant anharmonic waveform. If Eq. (12-1) is multiplied by dt and integrated over one period T, the sine and cosine integrals vanish, and the result is

$$a_0 = \frac{2}{T} \int_{t_0}^{t_0+T} f(t)\, dt \qquad a_m = \frac{2}{T} \int_{t_0}^{t_0+T} f(t) \cos m\omega t\, dt \qquad b_m = \frac{2}{T} \int_{t_0}^{t_0+T} f(t) \sin m\omega t\, dt$$
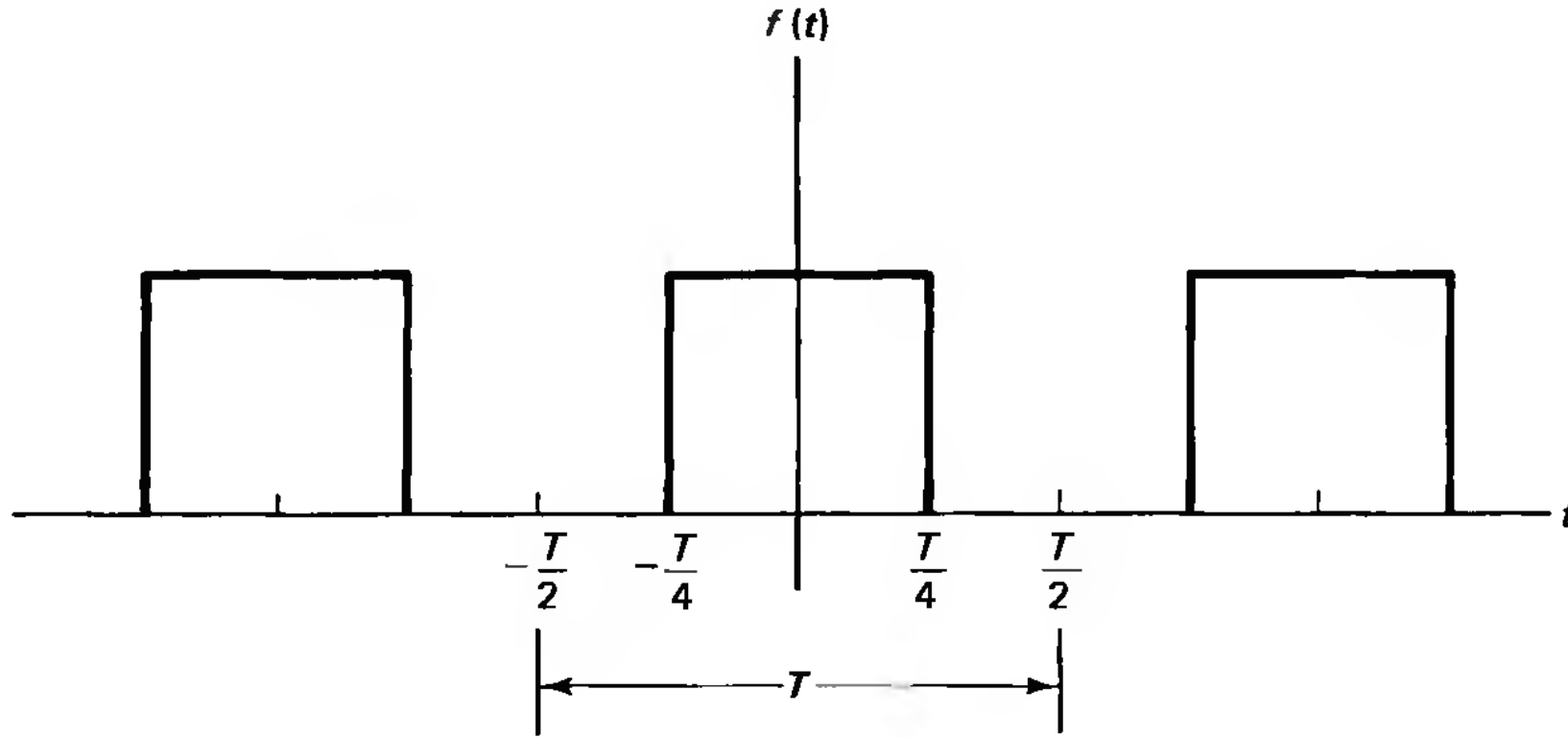
Figure 12-2 Square wave.

As an example, consider the Fourier analysis of the square wave shown in Figure 12-2 and represented over a period symmetric with the origin by

$$f(t) = \begin{cases} 0, & -T/2 < t < -T/4 \\ 1, & -T/4 < t < T/4 \\ 0, & T/4 < t < T/2 \end{cases}$$

Since the function is even in t, the coefficients b_m are found to vanish, and only cosine terms (also even functions of t) remain. From Eqs. (12-2) and (12-3), we find
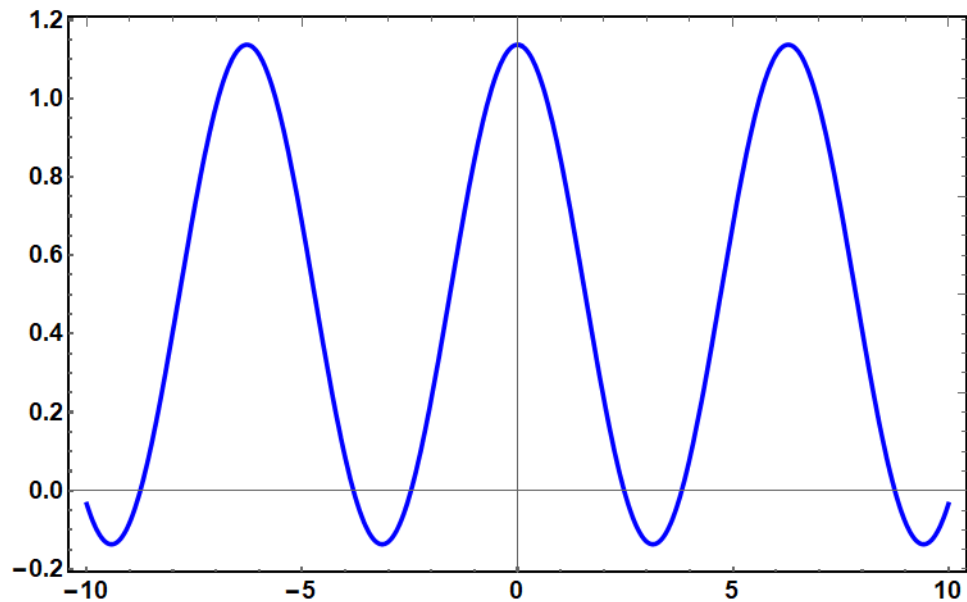
$$a_0 = 1$$

$$a_m = \left(\frac{2}{m\pi}\right) \sin\left(\frac{m\pi}{2}\right) \qquad , \quad b_m = 0$$

so that the Fourier series that converges to the square wave of Figure 12-2 as more terms are included in the summation is

$$f(t) = \frac{1}{2} + \sum_{m=1}^{\infty} \left[\left(\frac{2}{m\pi}\right) \sin\left(\frac{m\pi}{2}\right)\right] \cos m\omega t$$
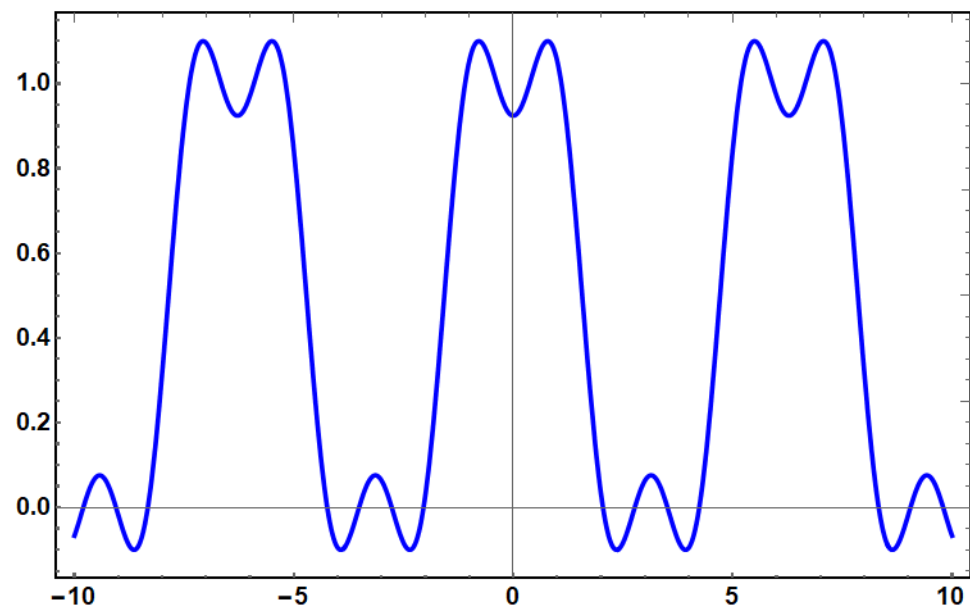
Writing out the first few terms explicitly,

$$f(t) = \frac{1}{2} + \frac{2}{\pi}\left(\cos \omega t - \frac{1}{3} \cos 3\omega t + \frac{1}{5} \cos 5\omega t + \cdots\right)$$
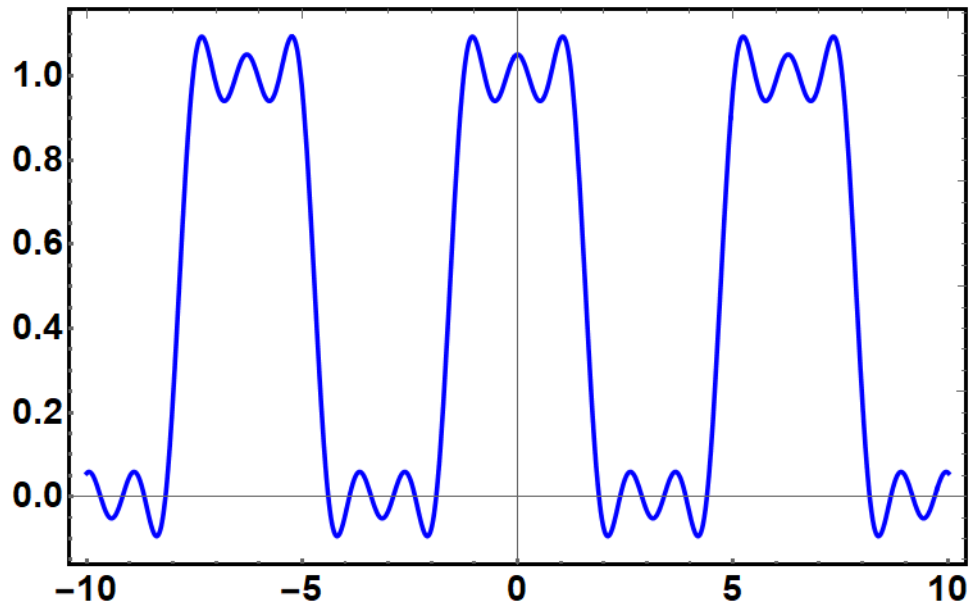
$$f(t) = \frac{1}{2} + \frac{2}{\pi} \cos(\omega t)$$
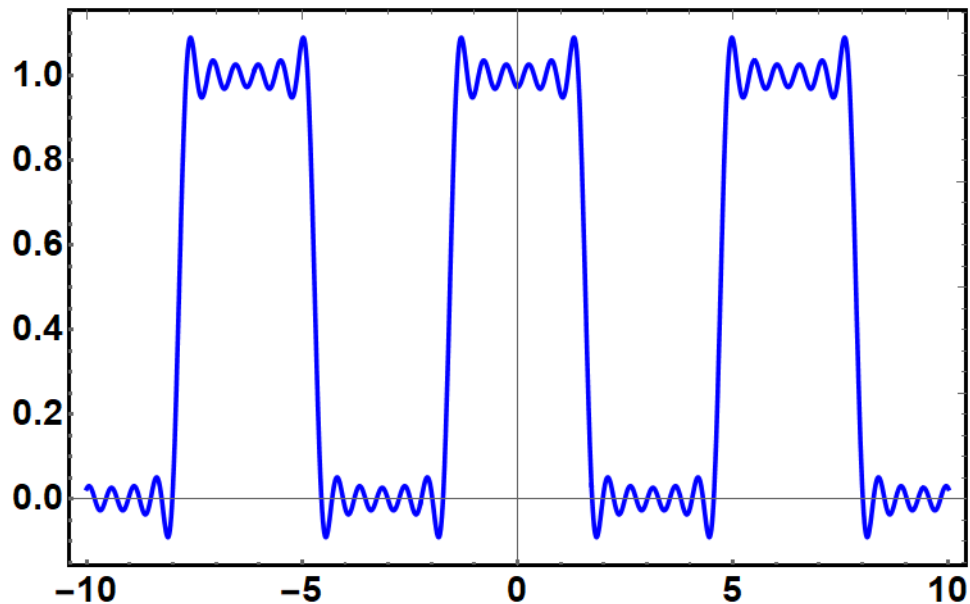
فقط هارمونیک اوّل (پایه) حضور دارد

$$f(t) = \frac{1}{2} + \frac{2}{\pi} \left[\cos(\omega t) - \frac{1}{3} \cos(3\omega t) \right]$$
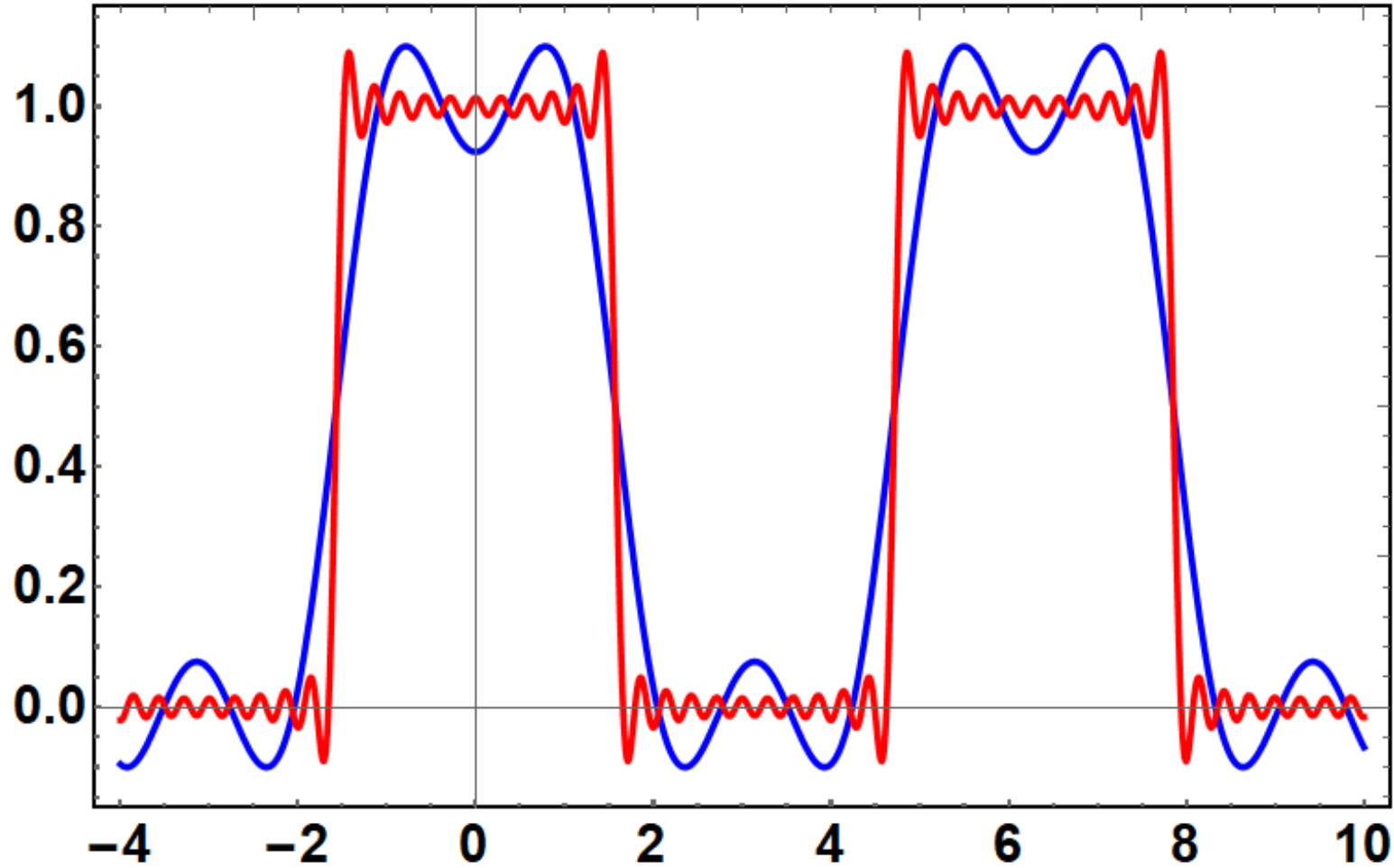
هارمونیک پایه و سومین هارمونیک حضور دارند

هارمونیکهای پایه، دوم و پنجم حضور دارند.

هرچه تعداد هارمونیکهای بیشتری در ساخت تابع شرکت
میکنند نمودار به شکل واقعی خود نزدیکتر میگردد.

تا هارمونیک پانزدهم حضور دارد.

$$f_{(t)} = \frac{1}{\gamma} + \frac{\gamma}{\pi}\left[\cos(\omega t) - \frac{1}{\gamma}\cos(\gamma \omega t)\right]$$

نمودار آبی برای حالتی که هارمونیک

اول و سوم حضور دارند.

نمودار قرمز رنگ برای حالتی که

تا هارمونیک ۲۱ ام در

ساخت تابع حضور دارم دارند.

$$f_{(t)} = \frac{1}{\gamma} + \frac{\gamma}{\pi}\left[\cos(\omega t) - \frac{1}{\gamma}\cos(\gamma \omega t) + \frac{1}{\Delta}\cos(\Delta \omega t) \cdots\cdots + \frac{1}{19}\cos(19\omega t) - \frac{1}{\gamma 1}\cos(\gamma 1\omega t)\right]$$

110

مشاهده می تا هارمونیک شماره ۵۵ در نظر گرفته شده است. فقط دو جمله اول یعنی اولین هارمونیک در نظر گرفته شده است و از سهم بقیه هارمونیکها صرفنظر شده است.

چگونه با جمع کردن توابع سینوسی با دروه های گردد که چگونه می توان یک موج مربعی ساخت. بسامدی مختلف

$$f(t) = \frac{1}{2} + \frac{2}{\pi} \left(\cos \omega t - \frac{1}{3} \cos 3\omega t + \frac{1}{5} \cos 5\omega t + \dots \frac{1}{55} \cos 55\omega t \right)$$

$$f(t) = \frac{1}{2} + \frac{2}{\pi} \cos \omega t$$
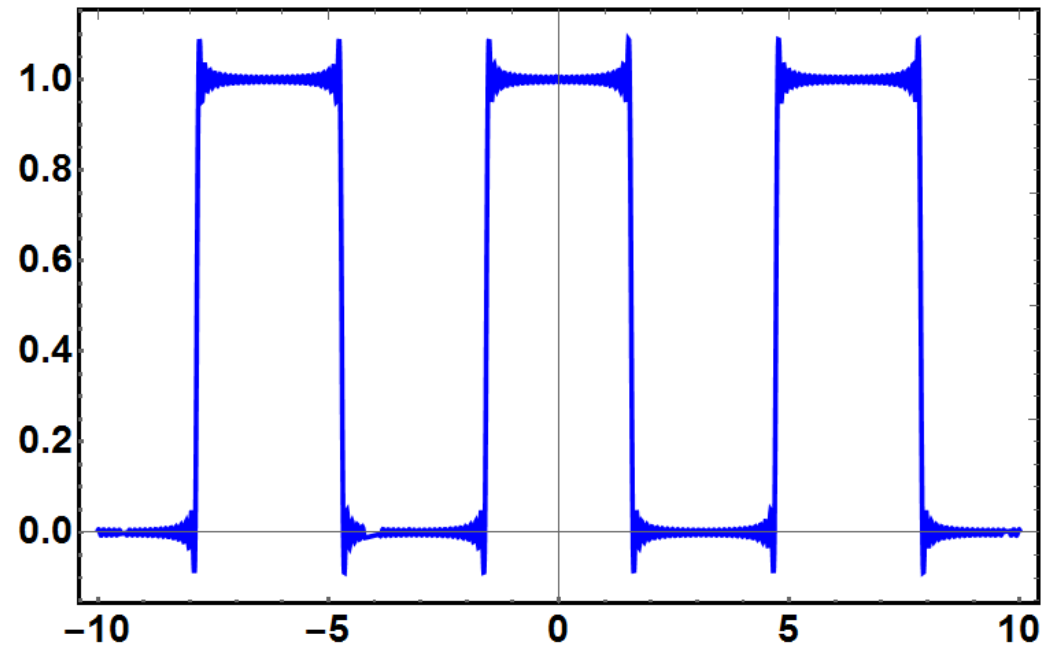
With the help of Euler's equation, the Fourier series given in general by Eq. (12-1), involving as it does both sine and cosine terms, can be expressed in complex notation using exponential functions. The result is

$$f(t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_n e^{-in\omega t} \qquad (12\text{-}5)$$

where now the coefficients

$$c_n = \frac{1}{T} \int_{t_0}^{t_0+T} f(t) e^{in\omega t}\, dt \qquad (12\text{-}6)$$

In cases where we wish instead to represent a nonperiodic function (cleverly interpreted mathematically as a periodic function whose period T approaches infinity), it is possible to generalize the Fourier series to a *Fourier integral*. For example, a single pulse is a nonperiodic function but can be interpreted as a periodic function whose period extends from $t = -\infty$ to $t = +\infty$. It can be shown that the discrete Fourier series now becomes an integral given by

$$f(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} g(\omega)e^{-i\omega t} \, d\omega \tag{12-7}$$
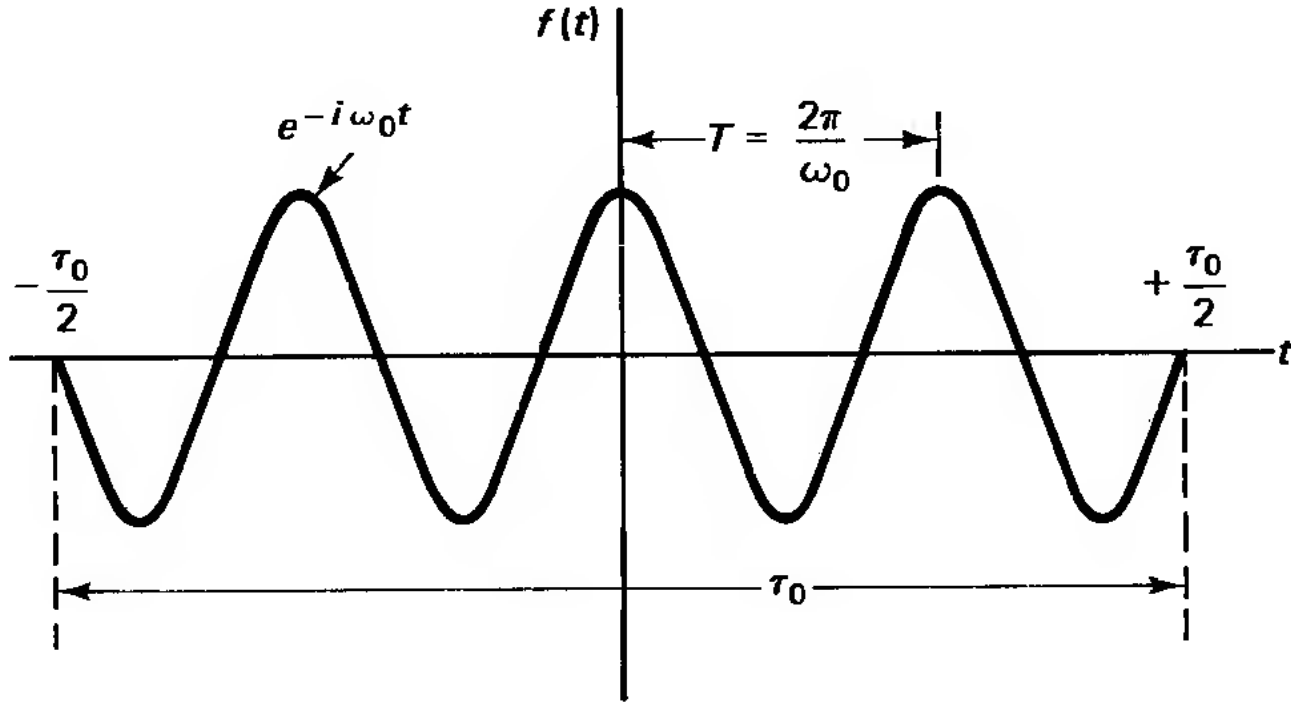
where the coefficient

$$g(\omega) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} f(t)e^{i\omega t} \, dt \tag{12-8}$$

مقدار تابع $g(\omega)$ سهم تابع $e^{i\omega t}$

در ساخت تابع $f(t)$ را پ دهد

$g(\omega)$ را تبدیل فوریه تابع $f(t)$ گویند.

کیک پالس با طول پالس τ_0

نوسانات میدان الکتریکی این پالس

به شکل هارمونیک $\sin \omega_0 t$ ($\cos \omega_0 t$)

با $e^{-i\omega_0 t}$ است.

Figure 12-4 Finite harmonic wave train of lifetime τ_0 and period $2\pi/\omega_0$. The spatial extension of the pulse is $\ell_0 = c\tau_0$.

The wave train has a lifetime of τ_0 and a frequency of ω_0.

$$f(t) = \begin{cases} e^{-i\omega_0 t}, & -\dfrac{\tau_0}{2} < t < \dfrac{\tau_0}{2} \\ 0, & \text{elsewhere} \end{cases}$$

$$f(t) = \begin{cases} e^{-i\omega_0 t} & 0 < t < \tau_0 \\ 0 \end{cases}$$

هرگاه وسط پالس را مبداء زمان اتیاب کنیم

هرگاه در گر

هرگاه، شروع پالس را مبداء زمان فرض کنیم

114

$$g(\omega) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} f(t)e^{i\omega t} \, dt = \frac{1}{2\pi} \int_{-\tau_0/2}^{+\tau_0/2} e^{i(\omega-\omega_0)t} \, dt$$

$$g(\omega) = \left[\frac{e^{i(\omega-\omega_0)t}}{2\pi i(\omega - \omega_0)} \right]_{-\tau_0/2}^{+\tau_0/2}$$

$$g(\omega) = \frac{1}{\pi(\omega - \omega_0)} \left[\frac{e^{i(\omega-\omega_0)\tau_0/2} - e^{-i(\omega-\omega_0)\tau_0/2}}{2i} \right]$$

after using the identity, ⟵ راسطہ اوبر $e^{ix} = \cos x + i \sin x$

$$e^{ix} - e^{-ix} \equiv 2i \sin x$$

$$g(\omega) = \frac{\sin[(\tau_0/2)(\omega - \omega_0)]}{\pi(\omega - \omega_0)} = \frac{\tau_0}{2\pi} \left\{ \frac{\sin[(\tau_0/2)(\omega - \omega_0)]}{[(\tau_0/2)(\omega - \omega_0)]} \right\}$$

$$\lim_{\omega \to \omega_0} g(\omega) = \frac{\tau_0}{2\pi} \qquad\qquad g(\omega) = 0 \quad \text{when} \quad \omega = \omega_0 \pm \frac{2n\pi}{\tau_0}$$

As ω increases (or decreases) from ω_0 then, $g(\omega)$ passes periodically through zero.

Notice that the shorter the wave train of (the smaller the lifetime), the wider is the central maximum. This means that the harmonic waves making important contributions to the actual wave train span a greater frequency interval. We take the half-width of the central maximum, or $2\pi/\tau_0$, to indicate in a rough way the range of dominant frequencies required.
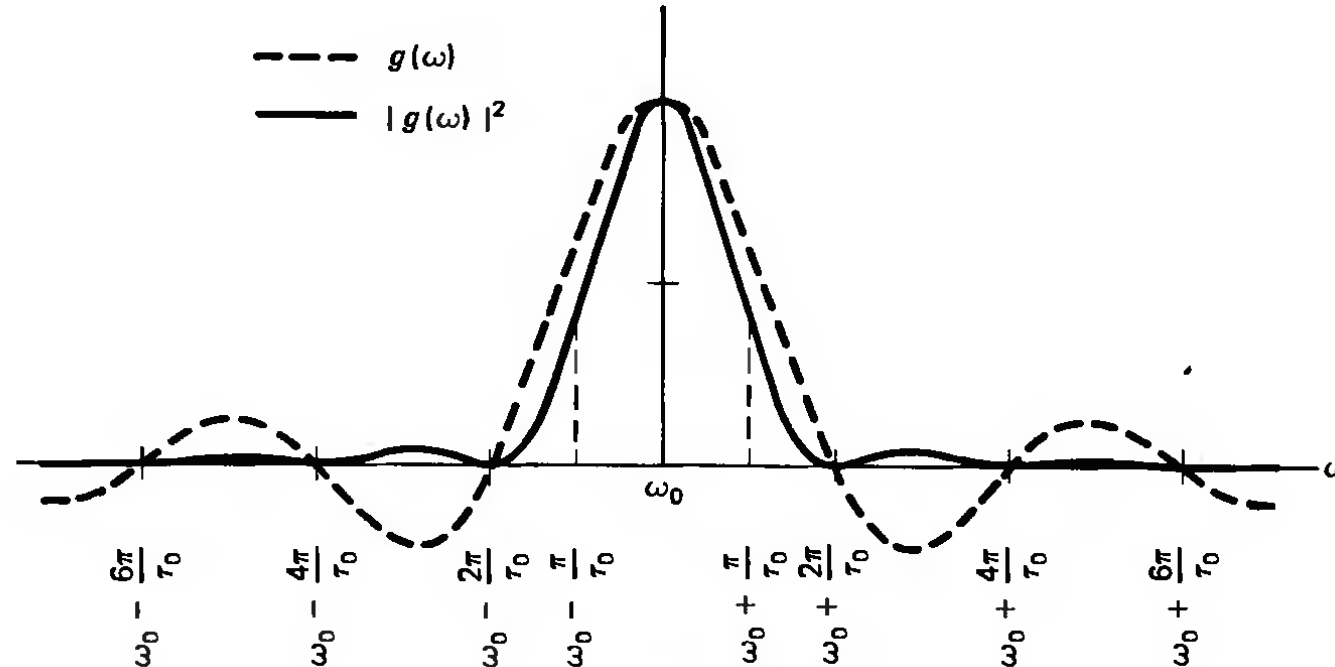
a measure of the frequency band centered around ω_0 required to represent the harmonic wave train of frequency ω_0 and lifetime τ_0,

$$\Delta\omega = \frac{2\pi}{\tau_0} \quad \text{or} \quad \Delta f = \frac{1}{\tau_0} \tag{12-15}$$

Equation (12-15) shows that if $\tau_0 \rightarrow \infty$, corresponding to a wave train of infinite length, $\Delta\omega \rightarrow 0$, and a single frequency ω_0 or wavelength λ_0 suffices to represent the wave train. In this idealized case we have a perfectly monochromatic beam, as considered previously. On the other hand, as $\tau_0 \rightarrow 0$, approximating a harmonic "spike," $\Delta\omega \rightarrow \infty$. Thus the sharper or narrower the pulse, the greater is the number of frequencies required to represent it, and so the greater the *line width*, or $\Delta\lambda$, of the harmonic wave package.

TEMPORAL COHERENCE AND NATURAL LINE WIDTH

Clearly, there are no perfectly monochromatic sources. Sources we call "monochromatic" emit light that can be represented as a sequence of harmonic wave trains of finite length, as suggested in Figure 12-6, each separated from the others by a discontinuous change in phase. These phase changes reflect the erratic process by which excited atoms in a light source undergo transitions between energy levels, producing brief and random radiation wave trains. A given source can be characterized by an average wave train lifetime τ_0, called its *coherence time*. Thus the physical implications of Eq. (12-15) may be summarized as follows: The natural width of a spectral line is inversely proportional to the coherence time of the source. The greater its coherence time, the more monochromatic the source. The *coherence length l_t* of a wavetrain is the length of its coherent pulse, or

$$l_t = c\tau_0 \qquad (12\text{-}16)$$

Combining Eqs. (12-15) and (12-16), the coherence length is

$$l_t = \frac{c}{\Delta f}$$

Then, approximating Δf by the magnitude of its differential from the expression $f = c/\lambda$, we may also write

$$l_t \cong \frac{\lambda^2}{\Delta\lambda} \tag{12-17}$$

Thus the natural line width is

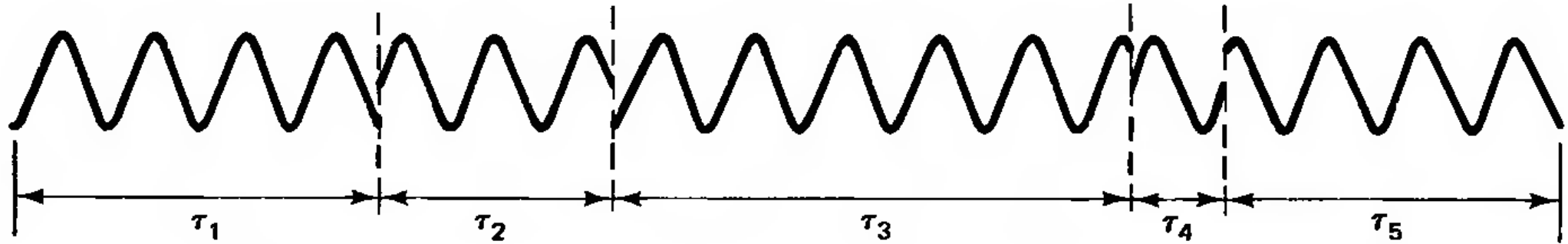$$\Delta\lambda \cong \frac{\lambda^2}{l_t} \tag{12-18}$$

Figure 12-6 Sequence of harmonic wavetrains of varying finite lengths or lifetimes τ. The wavetrain may be characterized by an average lifetime, the coherence time τ_0.

Since the line width of spectral sources can be measured, average coherence times and coherent lengths my be surmised. White light, for example, has a "line width" of around 300 nm, extending roughly from 400 to 700 nm. Taking the average wavelength at 550 nm, Eq. (12-17) gives

$$l_t = \frac{550^2}{300} \cong 1000 \text{ nm} \cong 2\lambda_{av}$$

a very small coherence length indeed, of around a millionth of a centimeter or two "wavelengths" of white light. Understandably, interference fringes by white light are difficult to obtain since the difference in the path lengths of the interfering beams should not be greater than the coherence length for the light. Sodium or mercury gas-discharge lamp sources are far more monochromatic and coherent. For example, the green line of mercury at 546 nm may have a line width of around 0.025 nm, giving a coherence length of 1.2 cm. One of the most monochromatic gas-discharge sources is a gas of the krypton 86 isotope, whose orange emission line at 606 nm has a line width of only 0.00047 nm. The coherence length of this radiation, by Eq. (12-17), is 78 cm! Laser radiation has far surpassed even the coherence of this gas-discharge source. The short-term stability of commercially available CO_2 lasers, for example, is such that line widths of around 1×10^{-5} nm are attainable at the infrared emission wavelength of 10.6 μm. These numbers give a coherence length of around 11 km.

SPATIAL COHERENCE

In speaking of temporal coherence, we have been considering the correlation in phase between temporally distinct points of the radiation field of a source along its line of propagation. For this reason, temporal coherence is also called *longitudinal coherence*. The degree of coherence can be observed by examining the interference fringe contrast in an amplitude-splitting instrument, such as the Michelson interferometer. As we have seen, temporal coherence is a measure of the average length of the constituent harmonic waves, which depends on the radiation properties of the source. In contrast, we now turn our attention to what is referred to as *spatial*, or *lateral*, *coherence*, the correlation in phase between spatially distinct points of the radiation field. This type of coherence is important when using a wavefront-splitting interferometer, such as the double slit. The quality of the interference pattern in the double-slit experiment depends on the degree of coherence between distinct regions of the wave field at the two slits.

For Fraunhofer diffraction, the source must be far enough away so that the wavefronts of light reaching the slit are essentially plane. Of course, this is easily accomplished in practice by placing the source in the focal plane of a positive lens. Similarly, we consider the observation screen to be effectively at infinity by using another lens on the other side of the slit,
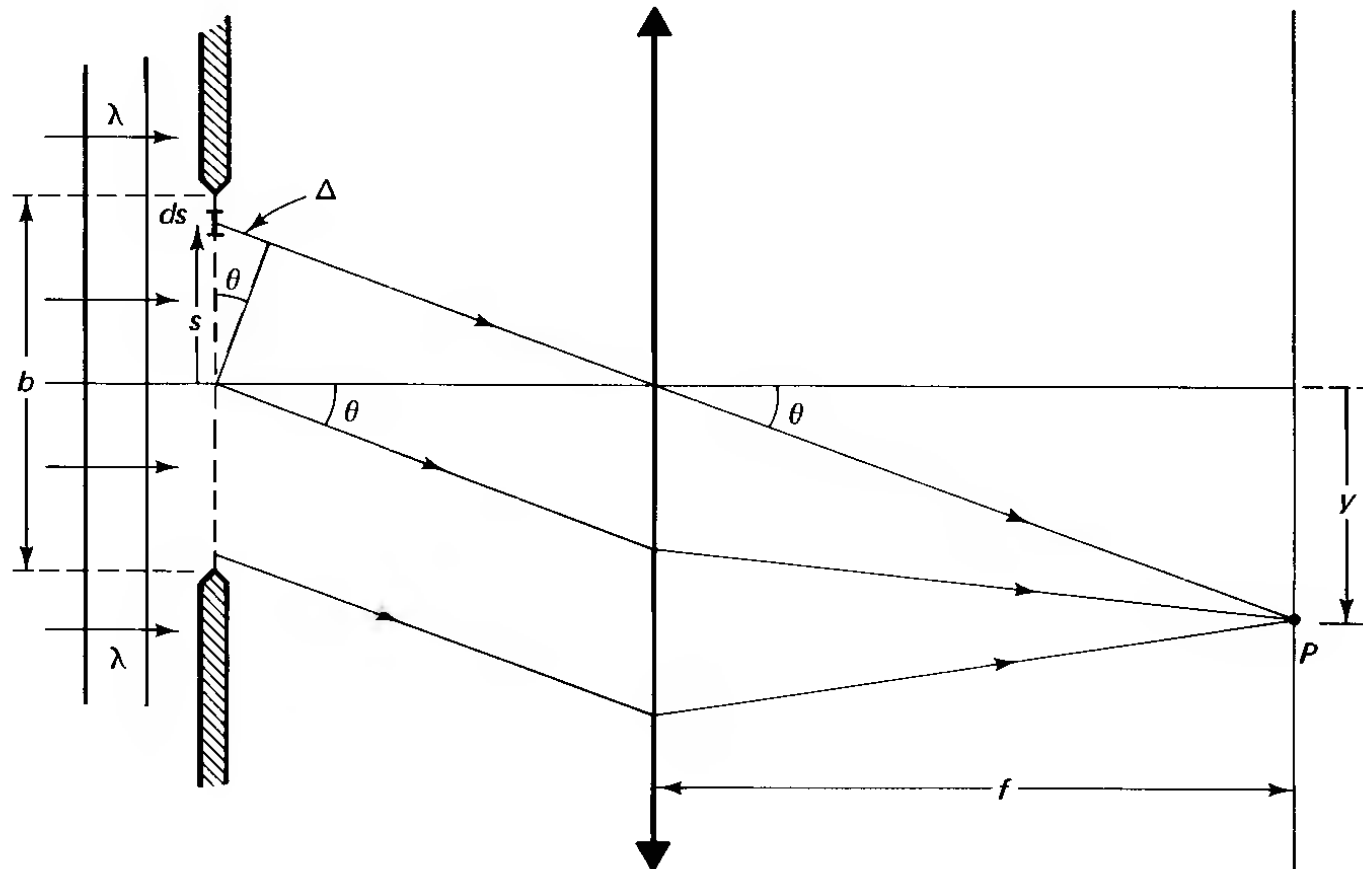
The plane portion of the wavefront at the slit opening represents a continuous array of Huygens' wavelet sources. We consider each interval of dimension ds as a source and calculate the result of all such sources by integrating over the entire slit width b. Each interval ds contributes spherical wavelets at P of the form

$$dE_p = \left(\frac{dE_0}{r}\right) e^{i(kr-\omega t)}$$

where r is the optical path length from the interval ds to the point P.

Let us set $r = r_0$ for the wave from the interval ds at $s = 0$. Then for any other wave originating at the interval ds at height s, taking the difference in phase into account, the differential field at P is

$$dE_p = \left(\frac{dE_0}{r}\right) e^{i[k(r_0+\Delta)-\omega t]}$$

In the amplitude, $dE_0/(r_0 + \Delta)$, the path difference Δ is unimportant, since $\Delta \ll r_0$, and therefore Δ can be neglected there. The phase, on the other hand, is very sensitive to small differences. For intervals ds below the axis, s is negative and the path difference is $(r_0 - \Delta)$, corresponding to shorter optical paths to P. The amplitude of the radiation from each interval clearly depends on the size of ds, so that when all such contributions are added by integration, we have the total effect at P. Accordingly, we write

$$dE_0 = E_L\, ds$$

where E_L is the amplitude per unit width of slit at unit distance away. For a point P at angle θ below the axis, relative to the lens center, the figure shows that $\Delta = s \sin \theta$. With these modifications, the differential contribution to the field at P from an arbitrary interval ds is

$$dE_P = \left(\frac{E_L\, ds}{r_0}\right) e^{i(kr_0 + ks \sin \theta - \omega t)}$$

124

Integrating over the width of the slit, we have

$$E_P = \left(\frac{E_L}{r_0} \int_{-b/2}^{b/2} e^{iks \sin \theta} \, ds \right) e^{i(kr_0 - \omega t)}$$

we retain only the portion in parentheses and integrate:

$$E_R = \frac{E_L}{r_0} \left(\frac{e^{iks \sin \theta}}{ik \sin \theta} \right)_{-b/2}^{b/2} \longrightarrow E_R = \frac{E_L}{r_0} \frac{1}{ik \sin \theta} [e^{(ikb \sin \theta)/2} - e^{-(ikb \sin \theta)/2}]$$

$$\beta \equiv \tfrac{1}{2} kb \sin \theta$$

$$E_R = \frac{E_L}{r_0} \frac{b}{2i\beta} (e^{i\beta} - e^{-i\beta}) = \frac{E_L}{r_0} \frac{b}{2i\beta} (2i \sin \beta) \longrightarrow \boxed{E_R = \frac{E_L b}{r_0} \frac{\sin \beta}{\beta}}$$

The irradiance at P is proportional to the square of the resultant amplitude there, or

$$I = \left(\frac{\epsilon_0 c}{2}\right) E_R^2 = \frac{\epsilon_0 c}{2}\left(\frac{E_L b}{r_0}\right)^2 \frac{\sin^2 \beta}{\beta^2}$$

$$I = I_0\left(\frac{\sin^2 \beta}{\beta^2}\right) \equiv I_0 \, \text{sinc}^2(\beta)$$

$$\lim_{\beta \to 0} \text{sinc}\,(\beta) = \lim_{\beta \to 0}\left(\frac{\sin \beta}{\beta}\right) = 1$$
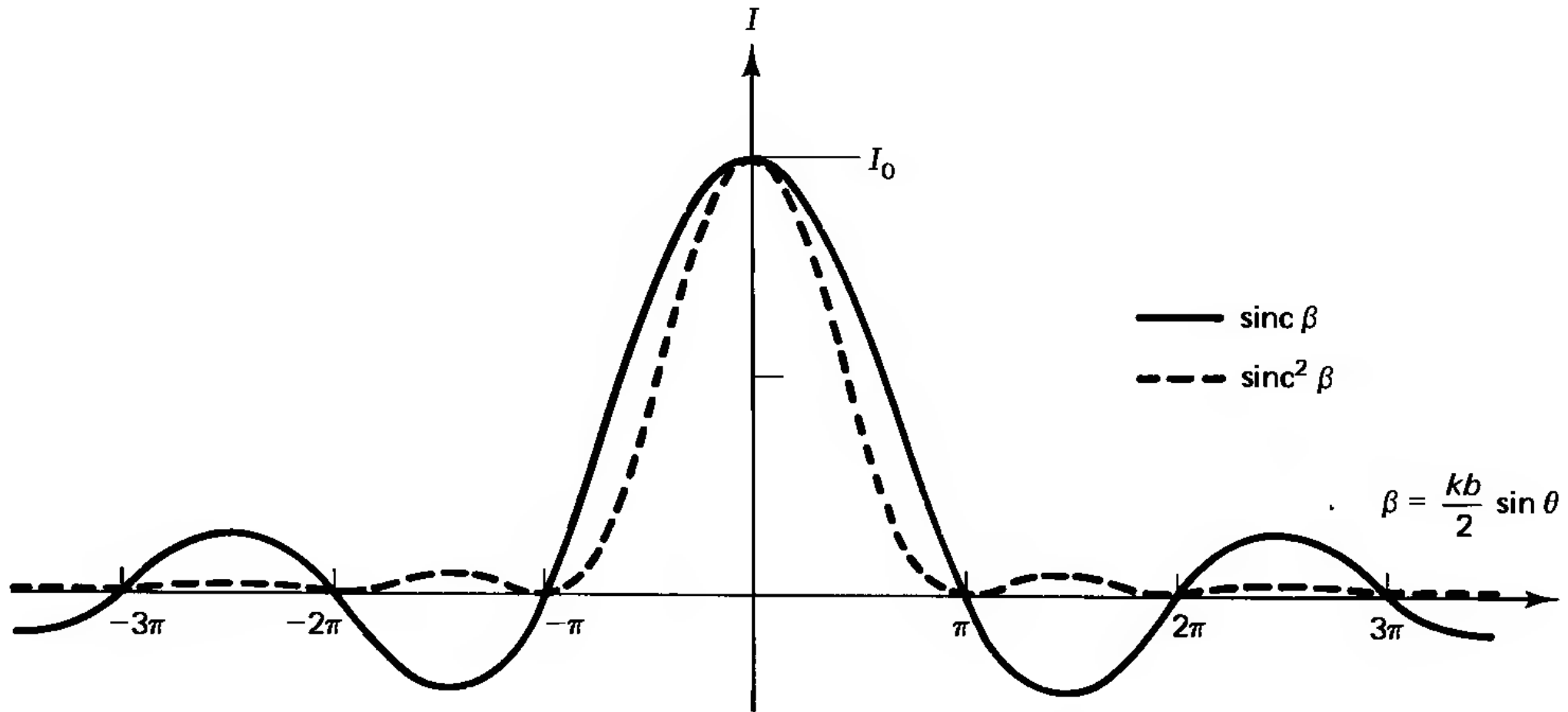
Otherwise, its zeros occur when $\sin \beta = 0$, that is, when

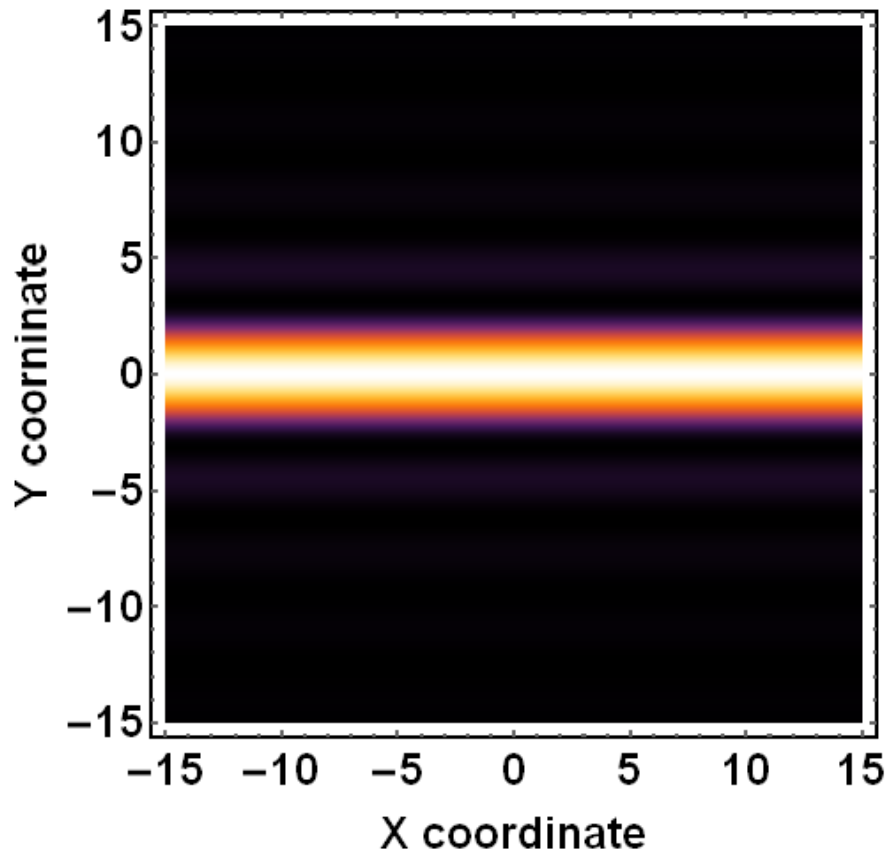$$\beta = \tfrac{1}{2}(kb \sin \theta) = m\pi, \qquad \text{with } m = \pm 1, \pm 2, \ldots$$

$$m\lambda = b \sin \theta$$

On the screen, therefore, the irradiance is a maximum at $\theta = 0$ or $y = 0$ and drops to zero at values y such that

$$y \cong \frac{m\lambda f}{b}$$

sinc β

- - - sinc^2 β
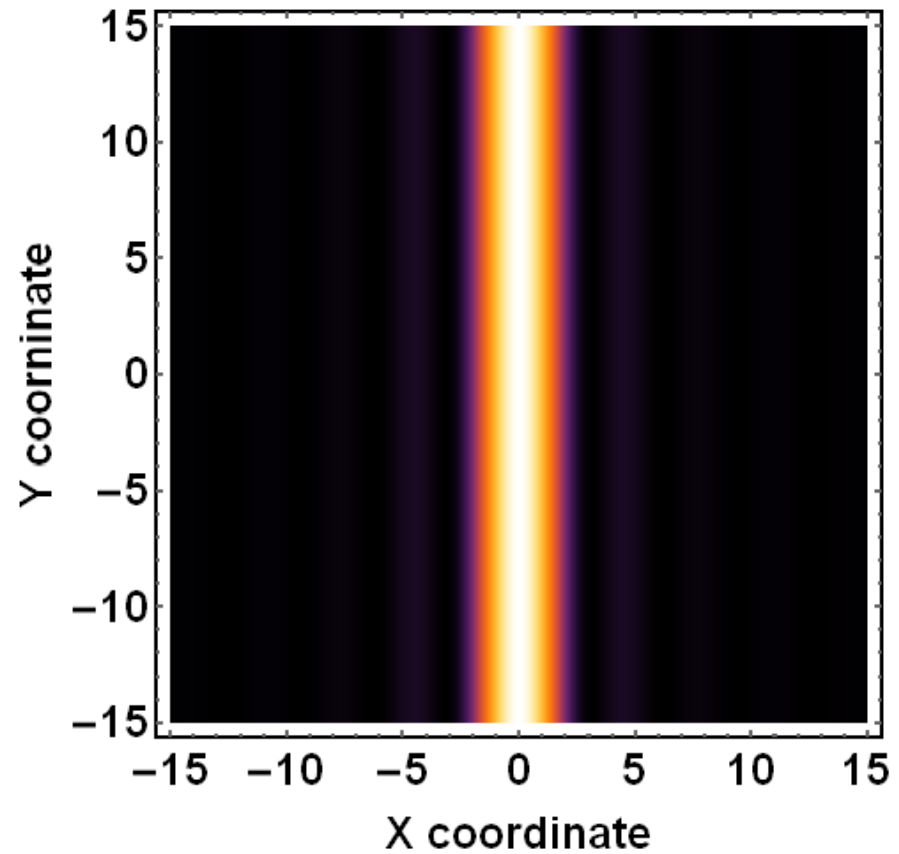
$\beta = \dfrac{kb}{2} \sin \theta$

طرح پراش از تک شکاف روی پرده در فاصله دور

شکاف افقی

نور در راستای قائم پراشیده شده

شکاف عمودی

نور در راستای افقی پراشیده شده

The secondary maxima of the single-slit diffraction pattern do not quite fall at the midpoints between zeros, even though this condition is more nearly approached as β increases. The maxima coincide with maxima of the sinc function, points satisfying

$$\frac{d}{d\beta}\left(\frac{\sin \beta}{\beta}\right) = \frac{\beta \cos \beta - \sin \beta}{\beta^2} = 0 \quad \boxed{\text{or } \beta = \tan \beta}$$

or $\beta = \tan \beta$. An angle equals its tangent at intersections of the curves $y = \beta$ and $y = \tan \beta$, both plotted in Figure 16-3. Intersections, excluding $\beta = 0$, occur at 1.43π (rather than 1.5π), 2.46π (rather than 2.5π), 3.47π (rather than 3.5π), and so on, as can be verified with a hand calculator. The plot clearly shows that intersection points aproach the vertical lines defining midpoints more closely as β increases. Thus, in the irradiance plot of Figure 16-2, secondary maxima are skewed slightly away from the midpoints toward the central peak. Most of the energy of the diffraction pattern falls under the central maximum, which is much larger than the adjoining maximum on either side.
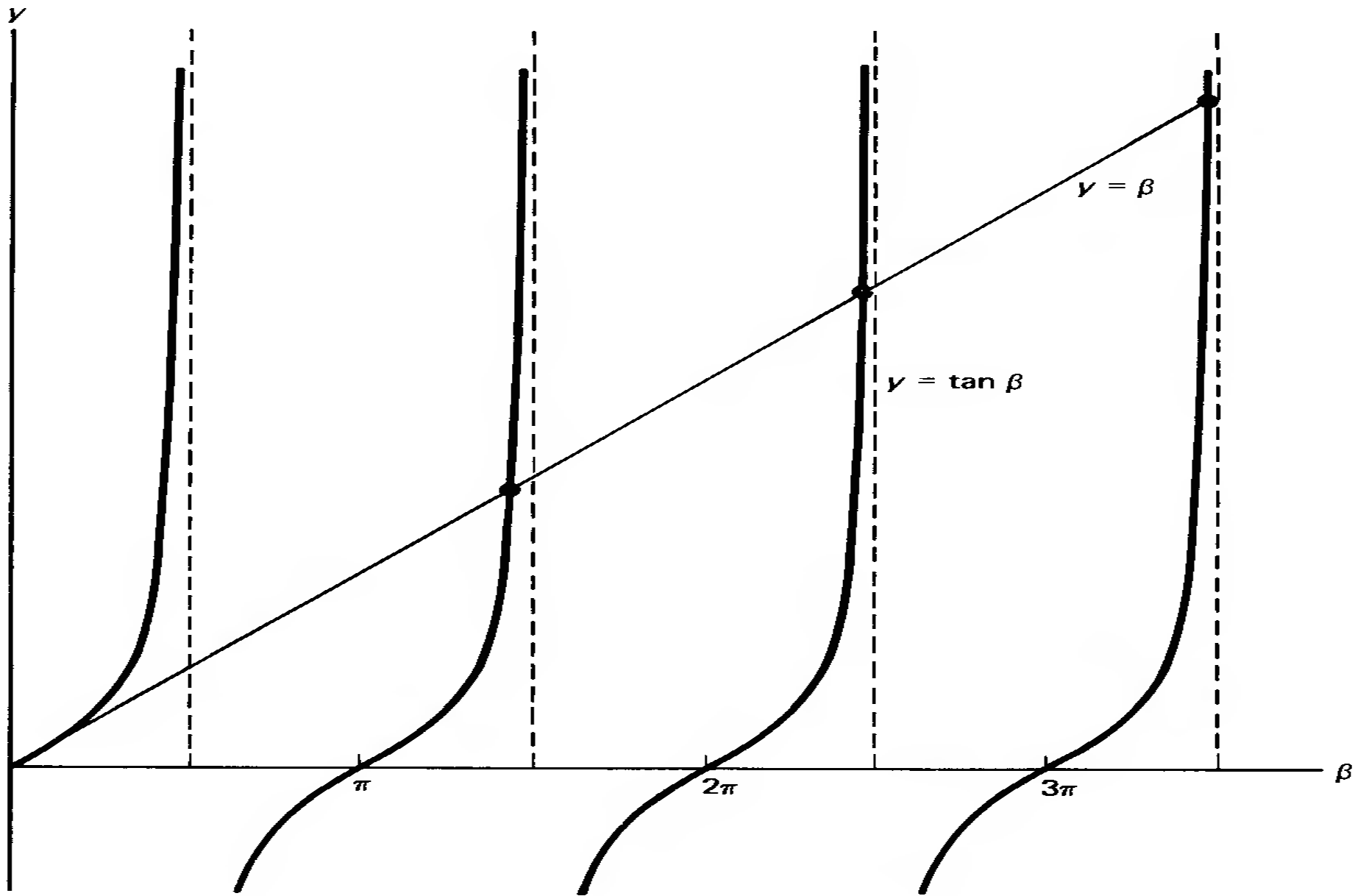
Figure 16-3 Intersections of the curves $y = \beta$ and $y = \tan \beta$ determine the angles β at which the sinc function is a maximum.

The central maximum represents essentially the image of the slit on a distant screen. We observe that the edges of the image are not sharp but reveal a series of maxima and minima that tail off into the shadow surroudning the image. These effects are typical of the blurring of images due to diffraction and will be seen again in other cases of diffraction to be considered. The angular width of the central maximum is defined as the angle $\Delta\theta$ between the first minima on either side. Using Eq. (16-12) with $m = \pm 1$ and approximating $\sin\theta$ by θ, we get

$$\Delta\theta = \frac{2\lambda}{b}$$

$$\Delta y = D = \frac{2\lambda f}{b} \quad \text{Diameter of the central peak}$$

The beam diameter cannot be smaller than the limit applied by the relation above. This limit is called "diffraction limit"

Example

What is the ratio of irradiances at central peak maximum to the first of the secondary maxima?

Solution The ratio to be calculated is

$$\frac{I_{\beta=0}}{I_{\beta=1.43\pi}} = \frac{(\sin^2 \beta/\beta^2)_{\beta=0}}{(\sin^2 \beta/\beta^2)_{\beta=1.43\pi}} = \frac{1}{(\sin^2 \beta/\beta^2)_{\beta=1.43\pi}}$$

$$= \left(\frac{\beta^2}{\sin^2 \beta}\right)_{1.43\pi} = \frac{20.18}{0.952} = 21.2$$

Thus the maximum irradiance of the nearest secondary peak is only 4.7% that of the central peak.